

بررسی پروفیل دما در یک گرمایش لیزری با سطح مقطع و شدت اشعه متفاوت

محمد اکبری^۱

m_akbari_g@yahoo.com

چکیده

مطالعه انتقال حرارت هنگامی که پدیده ذوب و انجماد رخ می دهد در بسیاری از کاربردهای مهندسی از اهمیت بسزایی برخوردار است. برخی از این کاربردها عبارتند از: مواردی از قبیل: جوشکاری، رشد کریستال، آبکاری فلزات، ریخته گری. خصوصیت مشترک تمام این مسائل وجود یک سطح مشترک که نواحی جامد و مایع را از یکدیگر جدا می کند، می باشد. گسترش این سطح به طرف ناحیه مایع یا جامد بستگی به گرادیان دمای دو طرف آن دارد و نرخ حرارت دفع شده از سطح مشترک جامد- مایع تعیین کننده نرخ انتشار سطح مزبور می باشد. در سالهای اخیر استفاده از انرژی لیزر جهت ذوب کردن مواد مورد توجه زیادی قرار گرفته است. در این پروژه یک جسم نیمه بی نهایت در معرض تابش اشعه لیزر قرار گرفته و میدان دما و شکل حوضچه مذاب ایجاد شده با در نظر گرفتن اثر سرعت انتقالی جسم بر روی میدان دما و شکل و ابعاد حوضچه مذاب بررسی شده است. برای بدست آوردن دمای گذرای نقاط مختلف جسم و نرخ رشد حوضچه مذاب، معادله انرژی بر مبنای انتالپی به روش تفاضل محدود صریح حل شده است. برای استفاده از روش انتالپی ابتدا باید این روش را تصحیح کرد. روش انتالپی به صورتی تصحیح شده است که دمای شبکه ای که فصل مشترک جامد و مایع در آن قرار گرفته، لازم نیست که برابر مقدار ثابت دمای ذوب باقی بماند. در عوض بوسیله ترکیب شرایط مرزی انرژی بر روی سطح مشترک جامد و مایع، در هر گام زمانی یک دمای جدیدی برای گره مورد نظر محاسبه شده است. محاسبات برای اشعه با سطح مقطع دایره ای و بیضوی انجام شده و نتایج حاصل از حل عددی با نتایج تجربی مقایسه شده اند. اثر سرعت بر روی نتایج به این صورت است که میدان دما و شکل حوضچه مذاب از حالت تقارن خارج می شوند و با افزایش سرعت اندازه حوضچه مذاب کاهش می یابد.

کلید واژه:

انرژی لیزر- جسم نیمه بی نهایت- حوضچه مذاب- انتالپی- دایره ای- بیضوی

۱- مقدمه

تکنولوژی جدید ساخت نیمه هادیها به سمت ابزارهای سه بعدی با اندازه‌های کوچک تمایل دارد. بنابراین ساخت لایه‌های نازک سیلیکون به صورت تک بلوری بر روی زیر لایه‌های غیرمتبلور یک ایده اساسی است. در تکنولوژی‌های ظریف الکترونیکی معمولاً برای رشد بلور از نشست بخار شیمیایی (C.V.D) استفاده می‌شود. موادی که از این روش بدست می‌آیند دارای یک ساختمان بلوری مشخصی هستند اما دارای معایبی از قبیل موج‌دار بودن مرزهای آنها می‌باشند. موجی بودن مرزها باعث می‌شود که مقدار ماده‌ای که به عنوان عنصر فعال مدارهای الکترونیکی عمل می‌کنند بطور عمده‌ای کاهش یابد. ساختمان کریستالی نیمه هادی بوسیله استفاده از لیزر اصلاح می‌شود. برای این منظور لازم است که یک اشعه لیزر در طول یک قطعه از جنس سیلیکون با سرعت مشخص حرکت کند.

چنانچه شدت اشعه لیزر به حد کافی زیاد باشد یک لکه مذاب از سیلیکون تشکیل می‌شود. بنابراین به این طریق سیلیکون ذوب می‌شود و سپس تبلور مجدد می‌یابد و نهایتاً یک ماده با تبلور مجدد بدون اینکه مرزهای موجی شکل باشد بدست می‌آید. بطور تجربی مشاهده شده است که یک نوار باریک و طویل بلورین در جهت عمود بر مرز انجماد منتشر می‌شود و این بدیهی است که میدان دما که توسط جاروب کردن اشعه لیزر بوجود می‌آید اندازه دانه‌های کریستال‌ها و کیفیت ساختمان کریستالی را معین می‌کند.

در سال ۱۹۹۱، گیرگروپلس و همکارانش [۱] تبلور مجدد یک لایه نازک سیلیکون را برای حالتی مورد بررسی قرار دادند که سطح مقطع اشعه لیزر بصورت دایره‌ای و بیضی شکل بوده است. آنها از روش انتالپی و تفاضل محدود صریح استفاده کرده و نتایج خود را با نتایج تجربی مقایسه کردند. در این مقاله نتایج عددی فقط برای یک سرعت معینی (2 mm/s) ارائه شده‌اند و تأثیر سرعت در نتایج بخوبی مشهود نیست. در مقایسه نتایج تجربی با نتایج عددی دیده می‌شود که نتایج عددی از دقت قابل قبولی برخوردار است. در سال ۱۹۹۲ رستمی و همکارانش [۲] در دانشگاه برکلی اثر تابش اشعه لیزر ساکن بر روی یک جسم نیمه بی‌نهایت را بر اساس روش انتالپی اصلاح شده مورد بررسی قرار دادند. با توجه به اینکه در این بررسی اشعه به صورت ساکن و دایره‌ای در نظر گرفته شده لذا با استفاده از تقارن محوری مسئله به صورت دو بعدی در آورده شده و با استفاده از تفاضل محدود صریح مسئله حل شده است و در نهایت نتایج عددی با نتایج تجربی مقایسه شده است و این مقایسه نشان می‌دهد که دقت روش عددی تا هنگامی که درجه حرارت سطح به درجه حرارت تبخیر نرسیده قابل قبول است.

در سال ۱۹۹۷ رستمی و رئیس [۳] گرمایش و ذوب یک جسم نیمه بی‌نهایت را تحت تأثیر یک اشعه لیزر متحرک مطالعه کردند. موضوع مورد بررسی یک مسئله همراه با انتقال حرارت هدایتی تحت

تأثیر یک منبع حرارت حجمی متحرک و سطح مشترک فاز جامد و مایع متحرک بوده است. معادله مورد استفاده قرار گرفته برای حل مسئله معادله انتقال حرارت فوریه می‌باشد. روش اختلاف محدود صریح برای بدست آوردن توزیع دما و شکل حوضچه مذاب به کار رفته است. نتایج از قبیل توزیع دما و شکل حوضچه مذاب برای اشعه ثابت و متحرک بدست آمده است و با نتایج تجربی برای اشعه ثابت مقایسه شده است و مشاهده می‌شود که بین نتایج تجربی و عددی تطابق خوبی برقرار است.

مروری بر مقالات قبلی نشان می‌دهد که همه مطالعات انتقال حرارت همراه با تغییر فاز بر پایه قانون انتقال حرارت فوریه استوار بوده است. بسیاری از تحقیقات نشان می‌دهد که مدل فوریه دارای ضعف‌های متعددی می‌باشد. مهمترین ضعف آن این است که پیش‌بینی می‌کند سرعت انتشار حرارت نامحدود است. کاتانو [۴] و ورنوت [۵] مدل موج حرارتی در جامدات را به فرم زیر ارائه دادند.

$$q = -k\nabla T - \tau \frac{\partial q}{\partial t} \quad (1)$$

پارامتر τ زمان آسودگی حرارتی (Relaxation Time) و از نظر فیزیکی زمان ارتباط محدود دمایی بین ذرات ماده می‌باشد.

از ترکیب معادله بالا و معادله بقا انرژی معادله انتقال حرارت هذلولوی بدست می‌آید:

$$\alpha \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \quad (2)$$

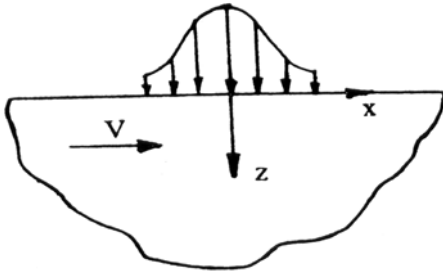
سد و دیدلیک [۶] در سال ۲۰۰۱ ذوب یک جسم جامد نیمه بینهایت را در حالت یک بعدی با توجه به تئوری غیرفوریه‌ای کاتانو و ورنوت بررسی کردند. آنها ثابت کردند که برخلاف تئوری کلاسیک فوریه که پیش‌بینی می‌کرد سرعت انتشار حرارت نامحدود است، تئوری غیرفوریه‌ای بیان می‌کند که سرعت اختلال حرارتی محدود می‌باشد. همچنین اثرات محدودیت سرعت موج حرارتی بر روی پدیده ذوب را تعیین کردند. نهایتاً به این نتیجه رسیدند که نتایج تئوری غیر فوریه‌ای با نتایج تئوری فوریه‌ای فقط در مقادیر زمانی کوچک با یکدیگر متفاوت است.

فانگ مینگ جیانگ [۷] در سال ۲۰۰۲ آزمایشاتی را بر روی جسم متخلخلی که بوسیله یک میکروثانیه پالس لیزر گرم شده است، انجام داد. نتایج آزمایشات نشان می‌دهد که اگر اختلال حرارتی به اندازه کافی بزرگ باشد (بدین معنی که مدت پالس به اندازه کافی کوچک و فلاکس حرارتی پالس به اندازه کافی بزرگ باشد) امکان مشاهده واضح پدیده انتقال حرارت هدایتی غیر فوریه‌ای در نمونه آزمایش ممکن بوده و این پدیده انتقال حرارت هدایتی غیر فوریه‌ای فقط در نواحی خیلی محدود اطراف محل اختلال حرارتی اتفاق می‌افتد.

عبدالجبار و همکارانش [۸] در سال ۲۰۰۳ رفتار دمایی یک ورق باریک تحت اثر یک نوسان دمایی سطح را بوسیله مدل انتقال حرارت هدایتی تأخیر فاز بررسی کردند. آنها به این نتیجه رسیدند که در این مدل

۳- معادلات حاکم و روش حل

نمای کلی مسئله در حالت دو بعدی در شکل نشان داده شده است:



شکل (۲): شکل شماتیک مسئله در حالت دو بعدی

شدت اشعه لیزر دارای گسترش مکانی مشخص بوده و نسبت به زمان پیوسته است.

سطح مقطع اشعه به دو صورت دایره ای و بیضی شکل بوده و شدت اشعه در سطح مقطع دارای توزیع گوسی می باشد که به صورت زیر تعریف می شود [۹].

$$I_S(x, y, t) = I_0 h(t) e^{-[(x^2 + y^2)/w^2]} \quad (۳)$$

$$I_S(x, y, t) = I_0 h(t) e^{-[(x/w_x)^2 + (y/w_y)^2]} \quad (۴)$$

رابطه (۳) برای سطح مقطع دایره ای است و w شعاع دایره است.

رابطه (۴) برای سطح مقطع بیضی شکل است و w_x شعاع اشعه در جهت x و w_y شعاع اشعه در جهت y است.

در روابط فوق I_0 شدت اشعه در مرکز آن است و واحد آن وات بر متر مربع می باشد و $h(t)$ تابعی است که تغییرات زمانی شدت اشعه را نشان می دهد. چنانچه شدت اشعه برخورد کننده با جسم هیچگونه تغییراتی با زمان نداشته باشد در این صورت $h(t) = 1$ است.

برای بدست آوردن معادله انتقال حرارت هذلولوی بایستی معادلات کاتانو و بقاء انرژی را با یکدیگر ترکیب کرد.
معادله کاتانو:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{q_x}{\tau} = -\frac{k}{\tau} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (۵)$$

معادله بقاء انرژی:

$$q_x = q_{x+dx} + dv \frac{\partial}{\partial t} (\rho c T) \quad (۶)$$

در نهایت با ساده سازی، معادله انتقال حرارت هذلولوی با استفاده از ترم انتالپی در سه بعد به صورت زیر نوشته می شود:

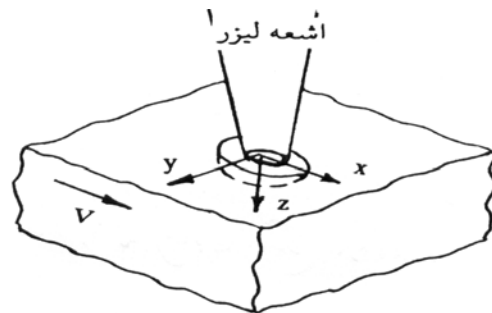
$$\frac{\partial e}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} + v \frac{\partial e}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \quad (۷)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + g$$

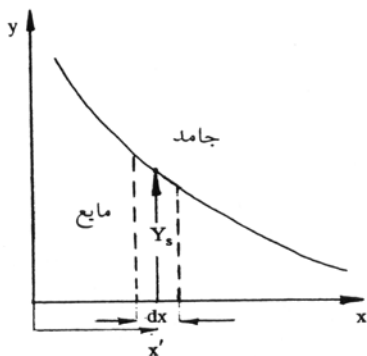
انتقال حرارت هدایتی تأخیر فاز در اختلالات سطح با فرکانس بالا اتفاق می افتد. همچنین اصول ریاضی که محدوده‌ای بین موج هذلولوی و مدل انتقال حرارت هدایتی تأخیر فاز تعیین می کند و از مدل دیفیوژنی منحرف می شود را بدست آوردند.

۲- بیان مسئله

یک جسم نیمه بی نهایت از جنس آلومینیوم خالص در معرض تابش اشعه لیزر متحرکی قرار می گیرد. شکل سطح مقطع اشعه به دو صورت دایره ای و بیضی شکل و توزیع شدت آن از نوع توزیع گوس در نظر گرفته می شود. معادله مورد استفاده قرار گرفته برای حل مسئله معادله انتقال حرارت هذلولوی می باشد. علت اینکه از معادله انتقال حرارت فوریه استفاده نشده این است که معادله فوریه برای زمانهای کوچک و مکانهای بزرگ دقت کافی ندارد. با توجه به اینکه اشعه لیزر با سرعت v در جهت x حرکت می کند توزیع درجه حرارت و هندسه حوضچه مذاب متقارن نیستند و نمی توان مسئله را به صورت تقارن محوری در نظر گرفت. بنابراین باید مسئله را به صورت سه بعدی در نظر گرفت و آن را حل کرد. خواص فیزیکی تابعی از دما و حالت جسم می باشد و تغییرات ترموفیزیکی خواص در حل مسئله منظور شده است. روش عددی به کار رفته عبارت از تفاضل محدود صریح می باشد که برای منطقه ای که پدیده ذوب در آن اتفاق می افتد بر اساس روش انتالپی اصلاح شده می باشد. هدف از حل مسئله بدست آوردن توزیع درجه حرارت در داخل حوضچه مذاب و خارج آن و همچنین تعیین شکل هندسی حوضچه مذاب و بررسی تأثیر پارامترهای مختلف می باشد.



شکل (۱): تصویر شماتیک جسم نیمه بینهایت تحت اشعه لیزر



شکل (۳): سطح مشترک بین فاز جامد و مائع در دو بعد

با توجه به شکل، یک نقطه ای را روی مرز مشترک در نظر گرفته و مختصات آن با X_s و Y_s نشان داده می شود.

$$Y_s = S(x, t) \quad (10)$$

در نهایت معادلات حاکم بر سطح مشترک در سه بعد به صورت زیر در می آیند:

$$\left[1 + \left(\frac{\partial X_s}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial X_s}{\partial z} \right)^2 \right] \left[k_s \frac{\partial T_s}{\partial x} - k_l \frac{\partial T_l}{\partial x} \right] \quad (11)$$

$$= L \left(\tau \frac{\partial^2 X_s}{\partial t^2} + \frac{\partial X_s}{\partial t} - V \right)$$

$$\left[1 + \left(\frac{\partial Y_s}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y_s}{\partial z} \right)^2 \right] \left[k_s \frac{\partial T_s}{\partial y} - k_l \frac{\partial T_l}{\partial y} \right]$$

$$= L \left(\tau \frac{\partial^2 Y_s}{\partial t^2} + \frac{\partial Y_s}{\partial t} \right)$$

$$\left[1 + \left(\frac{\partial Z_s}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z_s}{\partial y} \right)^2 \right] \left[k_s \frac{\partial T_s}{\partial z} - k_l \frac{\partial T_l}{\partial z} \right]$$

$$= L \left(\tau \frac{\partial^2 Z_s}{\partial t^2} + \frac{\partial Z_s}{\partial t} \right)$$

در روابط بالا $\frac{\partial Z_s}{\partial t}$ ، $\frac{\partial Y_s}{\partial t}$ ، $\frac{\partial X_s}{\partial t}$ مؤلفه های سرعت سطح مشترک در جهت x و y و z بوده و L گرمای نهان ذوب بر واحد حجم می باشند.

به ترتیب ضریب انتقال حرارت هدایتی در فاز جامد و مائع می باشند.

گرمای نهان ذوب آلومینیوم برابر است با:

$$L = 3.95 \times 10^5 \quad (J/kg)$$

۳-۲- روابط بین انتالپی و درجه حرارت

معادله (۷) معادله بقاء انرژی است که متغیرهای وابسته آن انتالپی و درجه حرارت است.

از حل عددی معادله (۷) انتالپی یک گره بدست می آید و برای بدست آوردن درجه حرارت باید برای هر حالت ماده روابط بین انتالپی و درجه حرارت موجود باشد.

انتالپی یک المان که در ناحیه کاملاً مائع و یا کاملاً جامد قرار گرفته است با استفاده از روابط زیر بدست می آیند [۹].

در رابطه بالا e ، انتالپی بر واحد حجم است و به صورت زیر تعریف شده است.

$$e = \int \rho c dT \quad (8)$$

چنانچه انرژی جذب شده حجمی در نظر گرفته شود می توان آن را به صورت یک منبع تولید انرژی داخلی فرض کرد که نرخ تولید انرژی بر واحد حجم می باشد و به صورت ترم g در معادله ظاهر شده است.

برای مسئله حاضر که در آن تغییر فاز صورت می گیرد اگر از معادله بر حسب دما استفاده شود باید یک بار معادله را برای ناحیه مائع و یک بار برای حالت جامد نوشته و آنها را همزمان حل کرد که در این صورت بدست آوردن سطح مشترک بین دو ناحیه جامد و مائع کاری مشکل است.

لذا معادله انتقال حرارت با استفاده از ترم انتالپی نوشته می شود. همچنین اثر سرعت انتقالی جسم نیز به صورت یک ترم در سمت چپ معادله مشاهده می شود.

همانطور که از شکل معادله پیداست برای حل نیاز به دو شرط اولیه و شش شرط مرزی می باشد. شرایط اولیه به صورت زیر تعریف می شود:

در ابتدا درجه حرارت کلیه نقاط برابر یک مقدار ثابتی می باشد.

$$t=0: \quad T = T_i \quad (\text{الف})$$

همچنین تغییرات دما نسبت به زمان در لحظه $t=0$ را برابر صفر در نظر گرفته می شود:

$$t=0: \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (\text{ب})$$

شرایط مرزی در جهت x, y, z را می توان به صورت زیر نوشت:

$$x \rightarrow \pm\infty \quad T = T_i$$

$$y \rightarrow \pm\infty \quad T = T_i$$

$$z \rightarrow \infty \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad T = T_i \quad (\text{ج})$$

۳-۱- معادلات حاکم بر سطح مشترک مائع-جامد

بر روی سطح مشترک درجه حرارت برابر دمای ذوب می باشد، بنابراین:

$$T_s = T_l = T_m \quad (9)$$

در رابطه بالا زیر نویس های l و s به ترتیب نشانگر ناحیه مائع و جامد می باشند. سطح مشترک جامد و مائع تابعی از پارامترهای مکانی x و y و z و پارامتر زمانی t می باشد و برای بدست آوردن روابط مربوط به سطح مشترک بایستی موازنه انرژی بر روی سطح مشترک نوشته شود.

ابتدا موازنه انرژی را بر روی یک مرز دو بعدی که در شکل نشان داده شده است نوشته و سپس نتایج در سه بعد تعمیم داده می شود.

(۱۱) نیاز به داشتن خواص ترموفیزیکی از قبیل گرمای ویژه، چگالی و ضریب هدایت حرارتی باشد [۱۰ و ۱۱].

$$\begin{aligned} K_s &= 22667 + 0.033T & 300K < T \leq 400K \\ K_s &= 2266 - 0.055T & 400K < T \leq 933K \\ K_s &= 63 + 0.03T & 933K < T \leq 1600K \\ c_{p_s} &= 0.762 + 4.67 \times 10^{-4}T & 300K < T \leq 933K \\ c_{p_l} &= 0.921 & T > 933K \\ \rho_s &= 2767 - 0.22T & 300K < T \leq 933K \\ \rho_l &= 2640 - 0.275T & 933K < T \leq 1400K \end{aligned}$$

همانطور که از خواص ترموفیزیکی پیداست تغییر فاز در دمای ۹۳۳ K اتفاق می افتد.

با جایگذاری خواص ترموفیزیکی در روابط (۱۲) و (۱۷) و با توجه به اینکه $T_m = 933K$ داریم:

$$\begin{aligned} e_s &= 2108.454T + 0.5622T^2 \\ &- 3.4246 \times 10^{-5}T^3 - 2428827.8 \\ e_l &= 2431.44T + 0.12663T^2 + 9.4 \times 10^8 \quad (20) \\ e &= xL + (3068.22 - 873.09x)(T - T_m) \end{aligned}$$

در حل عددی هنگامی که یک المان کاملاً جامد باشد با استفاده از رابطه اول با داشتن انتالپی درجه حرارت را با استفاده از روش نیوتن - رافسون بدست می آید. در حالتی که المان مورد نظر کاملاً مایع باشد نیاز به استفاده از این روش نیست و با حل معادله درجه دوم، درجه حرارت بدست می آید. اگر المان مورد نظر در حالت دو فازی باشد از رابطه آخر برای بدست آوردن درجه حرارت استفاده می شود.

۳-۳- روش حل عددی

برای حل مسئله از روش عددی تفاضل محدود صریح استفاده می شود. ابتدا بایستی میدان فیزیکی شبکه بندی گردد. در ناحیه ای که تغییر فاز صورت می گیرد برای بالا بردن دقت محاسبات از یک شبکه بندی ریزتری استفاده می شود. بدیهی است که این شبکه بندی ریز را نمی توان به کل میدان فیزیکی اعمال کرد زیرا ناحیه نسبتاً بزرگی نسبت به ناحیه ای که تغییر فاز در آن صورت می گیرد، تحت تأثیر انرژی حرارتی قرار دارد و به همین دلیل در صورت استفاده از شبکه بندی ریز زمان محاسبات کامپیوتری بسیار زیاد می شود. بنابراین برای حداقل کردن زمان محاسبات در ناحیه ای از میدان فیزیکی که تغییر فاز در آن صورت نمی گیرد از یک شبکه بندی درشت تری استفاده می شود. با توجه به مطالب ذکر شده برای حل عددی از یک شبکه بندی متعامد مرکب استفاده کرده و کل میدان فیزیکی به دو ناحیه

$$\begin{aligned} e_s &= \int_{T_{ms}}^T \rho_s c_s dT & T_{ms} \leq T \\ e_l &= \int_{T_{ml}}^T \rho_l c_l dT + L & T_{ml} \geq T \end{aligned} \quad (12)$$

e_l و e_s به ترتیب انتالپی در حالت جامد و مایع می باشند. برای المانی که در حالت دو فازی قرار دارد یعنی بخشی از آن مایع و بخش دیگر جامد است باید ابتدا x نسبت حجم مایع به حجم کل المان را محاسبه کرده و سپس انتالپی متوسط به صورت زیر بدست می آید:

$$e = xe_l + (1-x)e_s \quad (13)$$

برای استفاده از رابطه (۱۳) نیاز به بدست آوردن پارامترهای e_s و e_l می باشد. برای بدست آوردن این پارامترها یک مقدار متوسط برای حاصلضرب گرمای ویژه و چگالی (ρc) در نظر گرفته و رابطه (۱۳) به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$e = x \left(\int_{T_{ml}}^T (\rho c)_{av} dT + L \right) + (1-x) \int_{T_{ms}}^T (\rho c)_{av} dT \quad (14)$$

رابطه بالا به صورت زیر ساده می شود:

$$e = xL + (\rho c)_{av} [(T - T_{ms}) + x(T_{ms} - T_{ml})] \quad (15)$$

برای موادی که تغییر فاز آنها در دمای ثابت T_m صورت می گیرد.

$$T_{ml} = T_{ms} = T_m \quad (16)$$

با جایگذاری رابطه (۱۶) در رابطه (۱۵) داریم:

$$e = xL + (\rho c)_{av} (T - T_m) \quad (17)$$

هنگامی که المان در حالت دو فازی قرار دارد برای بدست آوردن انتالپی از رابطه (۱۷) باید ابتدا $(\rho c)_{av}$ محاسبه شود:

$$(\rho c)_{av} = x(\rho c)_l + (1-x)(\rho c)_s \quad (18)$$

$(\rho c)_s$ و $(\rho c)_l$ به ترتیب مربوط به مایع و جامد در دمای ذوب می باشند.

برای بدست آوردن انتالپی در حالت جامد، مایع و دو فازی با استفاده از روابط (۱۲) و (۱۷) و سطح مشترک با استفاده از رابطه

همانطوری که از شکل (۴) مشاهده می شود رابطه زیر بین ابعاد المان های داخلی و خارجی برقرار است.

$$15 \times \Delta y_i = 3 \times \Delta y_o \quad (21)$$

$$\frac{\Delta y_o}{\Delta y_i} = 5 \quad (22)$$

در بیشتر محاسبات عددی شعاع اشعه لیزر برابر ۱۰۰ میکرومتر در نظر گرفته شده است. با توجه به مطالبی که قبلاً به آنها اشاره شد، حداکثر قطر حوضچه مذاب ساکن تقریباً ۱/۲ برابر قطر اشعه لیزر می باشد.

$$d_{melt} = 1.2 \times 200 = 240 \mu m \quad (23)$$

بنابراین اندازه اضلاع ناحیه داخلی باید حداقل 240×240 میکرومتر باشد و این در حالی است که حوضچه مذاب (اشعه) ساکن باشد. ولی اگر اشعه با سرعت معین v در جهت مثبت محور x ها حرکت نماید، حوضچه مذاب نسبت به محور y ها نامتقارن می شود. یعنی اینکه اندازه آن در جهت مثبت محور x ها بیشتر از اندازه آن در جهت منفی محور x ها می شود و نتیجه اینکه وقتی اشعه ساکن نیست و دارای سرعت V در جهت مثبت محور x است، اندازه اضلاع ناحیه داخلی باید بیشتر از مقدار فوق باشند تا اینکه تمام قسمت ذوب شده در داخل آن قرار بگیرد که در اینجا اضلاع ناحیه داخلی 300×300 میکرومتر در نظر گرفته شده است. یعنی اگر یک دایره ای در ناحیه داخلی محیط شود قطر آن برابر 300 میکرومتر خواهد بود.

$$\Delta x_i = \Delta y_i = \frac{300}{15} = 20 \mu m \quad (24)$$

$$\Delta x_o = \Delta y_o = 5 \times \Delta x_i = 100 \mu m \quad (25)$$

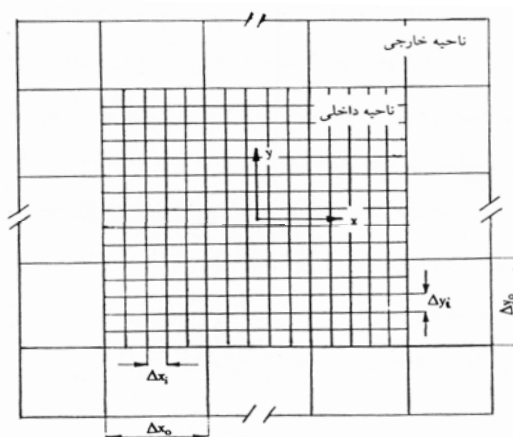
اندازه Δz_i بستگی شدیدی به مقدار گامهای زمانی Δt_i دارد. به عبارت دیگر برای اینکه حل عددی پایدار باشد باید مقادیر مناسبی برای Δz_i و Δt_i در نظر گرفت. مقدار پارامترهای Δz_i و Δt_i رابطه مستقیم با زمان لازم برای اینکه سیستم به حالت پایدار برسد دارد. یعنی هرچه قدر زمان لازم برای پایداری کمتر باشد پارامترهای Δz_i و Δt_i مقادیر کوچکتری به خود می گیرند. لازم به ذکر است که ناحیه داخلی در جهت z باید دارای اندازه ای باشد که عمق حوضچه مذاب از آن تجاوز نکند. در اینجا $\Delta z_i = 12 \mu m$ در نظر گرفته شده است و در نتیجه:

$$\Delta z_o = 5 \times \Delta z_i = 60 \mu m \quad (26)$$

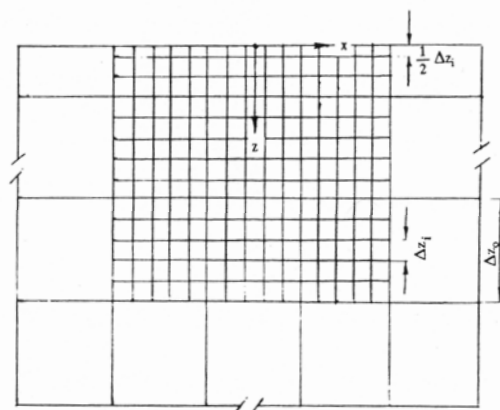
در تعیین ابعاد ناحیه خارجی بایستی دقت کرد زیرا اضلاع ناحیه خارجی باید به اندازه ای بزرگ باشند که در گره های کناری شبکه شرایط مرزی بی نهایت برقرار باشد. معمولاً شعاع ناحیه خارجی را 20 برابر شعاع اشعه لیزر در نظر می گیرند. برای $w = 100 \mu m$ داریم:

داخلی و خارجی تقسیم می شود. ابعاد ناحیه داخلی طوری در نظر گرفته می شود که حوضچه مذاب به صورت کامل در این ناحیه قرار گیرد.

بیشترین قطر حوضچه مذاب (قطر حوضچه مذاب در سطح جسم و در حالت پایدار) تقریباً ۱/۲ برابر قطر اشعه لیزر و بیشترین عمق در حوضچه مذاب تقریباً برابر شعاع اشعه لیزر می باشد [۱۲]. با توجه به این نتایج با انتخاب یک شعاع مشخصی برای اشعه لیزر می توان محدوده ای برای ناحیه ای که تغییر فاز در آن صورت می گیرد پیش بینی نمود.



شکل (۴): شبکه بندی در صفحه x-y



شکل (۵): شبکه بندی در صفحه x-z

در شکل های (۴ و ۵) شبکه بندی که مورد استفاده قرار گرفته است در صفحات x-y و x-z نشان داده شده است. در صفحه x-y برای ناحیه داخلی از یک شبکه 15×15 استفاده شده است که اضلاع المان ها برای این ناحیه در صفحه x-y با Δx_i و Δy_i مشخص می شود و اضلاع المان ها برای ناحیه خارجی در صفحه x-y با Δx_o و Δy_o مشخص می شود. در شبکه بندی مورد نظر $\Delta x_i = \Delta y_i$ و $\Delta x_o = \Delta y_o$ ، که اندازه $\Delta x_i = \Delta y_i$ را باید با توجه به شعاع اشعه مشخص کرد.

$$a_e = a_w = \frac{1}{\Delta x_i^2}$$

$$a_n = a_s = \frac{1}{\Delta y_i^2}$$

$$k_i = 1 \Rightarrow \begin{cases} a_b = 0 \\ a_t = \frac{2}{\Delta z_i^2} \end{cases}$$

$$avel = \Delta t_i \times v / (\Delta x_i)$$

برای ناحیه خارجی نیز مشابه ناحیه داخلی معادله انرژی به شکل تفاضل محدود صریح نوشته می شود. با این تفاوت که چون در ناحیه خارجی تغییر فازی صورت نمی گیرد کافی است معادله انرژی فقط دارای متغیر وابسته درجه حرارت باشد و نیازی به نوشتن معادله انرژی بر اساس ترم انتالپی نمی باشد.

$$\begin{aligned} T'_c &= T_c - avel(T_e - T_c) + A.[akce \times a_e(T_e - T_c) \\ &+ akcw \times a_w(T_w - T_c) + akcn \times a_n(T_n - T_c) \\ &+ akcs \times a_s(T_s - T_c) + akcb \times a_b(T_b - T_c) \\ &+ akct \times a_t(T_t - T_c) + b] / (\rho c)_s \end{aligned} \quad (31)$$

۳-۵- معیار پایداری روش حل

روش معمول بدست آوردن این معیار این است که در معادله انرژی به شکل اختلاف محدود، ضریب درجه حرارت مربوط به زمان قبلی باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد. به طور کلی برای بدست آوردن این ضرایب باید کلیه جملاتی را که دارای (i, j, k) می باشند مرتب کرد و سپس از این نتیجه برای بدست آوردن یک حالت حدی برای Δt استفاده نمود. برای این منظور با فرض ثابت بودن خواص حرارتی در رابطه (۳۰)، چنانچه ضریب T_c با ثابت B نشان داده شود:

$$B = 1 - \left(\frac{v}{\Delta x} + \frac{2kA}{\rho c_p \Delta x_i^2} + \frac{2kA}{\rho c_p \Delta y_i^2} + \frac{2kA}{\rho c_p \Delta z_i^2} \right) \Delta t_i \quad (32)$$

شرط پایداری به صورت زیر خواهد بود:

$$1 > \left(\frac{v}{\Delta x} + \frac{2kA}{\rho c_p \Delta x_i^2} + \frac{2kA}{\rho c_p \Delta y_i^2} + \frac{2kA}{\rho c_p \Delta z_i^2} \right) \Delta t_i \quad (33)$$

برای حالت خاص $v = 0$ و $\Delta x_i = \Delta y_i = \Delta z_i$ رابطه (۳۳) به صورت زیر ساده می شود:

$$\Delta t_i \leq \frac{\Delta z_i^2}{6A\alpha} \quad (34)$$

$$R_o = 20 \times w = 2000 \mu m \quad (27)$$

تعداد گره ها بین $x = R_i$ و $x = R_o$ به اِزاء $\Delta x_o = 100 \mu m$ برابر است با:

$$m_x = \frac{2000 - 150}{\Delta x_o} \approx 19 \quad (28)$$

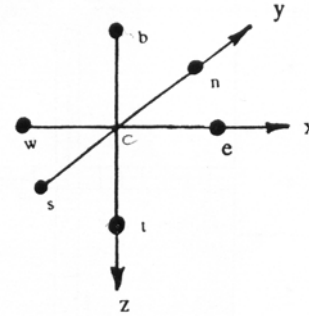
بنابراین در صفحه $x-y$ در ناحیه خارجی تعداد گره ها برابر است با:

$$(19 \times 2 + 3)^2 - (3 \times 3) = 1672 \quad (29)$$

در جهت z نیز اندازه ناحیه خارجی را ۲۰ برابر شعاع اشعه در نظر گرفته و به طریق مشابه می توان تعداد گره ها در جهت z که برابر ۳۴ می باشند را بدست آورد. در نهایت با توجه به شکل‌های (۴و۵)، در ناحیه داخلی محاسبات باید برای $(15 \times 15 \times 13 = 2925)$ گره انجام بگیرد و برای ناحیه خارجی محاسبات برای $(41 \times 41 \times 34) - (3 \times 3 \times 3) = 57127$ گره انجام گیرد. اگر مسئله نسبت به یکی از محورهای x و y تقارن داشته باشد تعداد گره‌هایی که در محاسبه وارد می شود نصف می شود.

۳-۴- شکل تفاضل محدود معادلات

برای اینکه رابطه (۷) به شکل تفاضل محدود نوشته شود، یک گره و گره های مجاور به صورت زیر در نظر گرفته می شود:



شکل (۶): نمای شماتیک یک گره و گره های مجاور در سه جهت

برای ناحیه داخلی:

$$\begin{aligned} e'_c &= e_c - avel(e_e - e_c) + A.[akce \times a_e(T_e - T_c) \\ &+ akcw \times a_w(T_w - T_c) + akcn \times a_n(T_n - T_c) \\ &+ akcs \times a_s(T_s - T_c) + akct \times a_t(T_t - T_c) \\ &+ akcb \times a_b(T_b - T_c)] + b \end{aligned} \quad (30)$$

A یک ضریب زمانی می باشد و عبارت است از :

$$A = \frac{(\Delta t)^2}{\Delta t + 2\tau}$$

$akce$ و $akcw$ ضریب هدایت حرارتی متوسط بین نقطه c و نقاط مجاور آن بوده و مفهوم مشابه را ضرایب $akcs$, $akcn$, $akcb$ و $akct$ دارند.

b ناشی از منبع انرژی حرارتی می باشد.

همچنین:

به طور خاص برای شبکه بندی مورد استفاده قرار گرفته شده که در

$$\Delta z_o = 5\Delta z_i$$

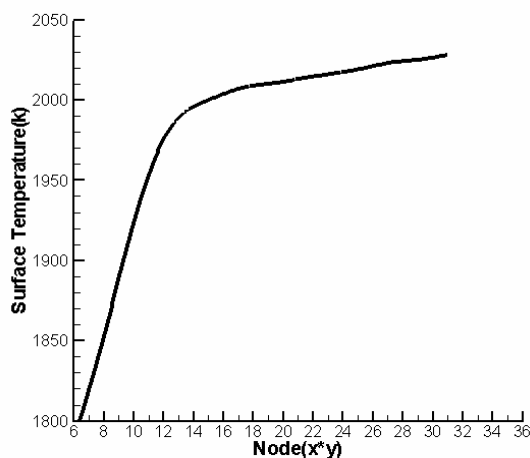
$$\frac{\Delta t_i}{\Delta t_o} = \frac{1}{25} \quad (39)$$

یعنی اینکه به ازاء هر ۲۵ بار انجام محاسبات برای ناحیه داخلی، یک بار محاسبات برای ناحیه خارجی انجام می گردد. شکل تفاضل محدود معادلات حاکم بر سطح مشترک نیز مشابه ناحیه داخلی و خارجی نوشته شده و با استفاده از برنامه کامپیوتری نتایج بدست آمده و سپس رسم می شود.

۴- نتایج

همانطور که در بخش قبل مشاهده شد ابعاد ناحیه داخلی (ناحیه ای که در آن تغییر فاز صورت می گیرد) 15×15 در نظر گرفته شد. حال به بررسی چگونگی بدست آوردن آن پرداخته می شود. (Grid study)

ابتدا نمودار دمای نقطه مرکزی سطح بر حسب تعداد گره های مختلف رسم شده و مشاهده می شود که در قسمتی از نمودار تغییرات دما با افزایش تعداد گره ها ناچیز است و می توان تقریباً یکنواخت فرض کرد.



شکل (۸): تغییرات دمای نقطه مرکزی سطح بر حسب تعداد گره ها

همانطور که در شکل (۸) مشاهده می گردد از گره ی ۱۵ به بعد تغییرات دما اندک است و می توان آن را به صورت یکنواخت فرض کرد. بنابراین با توجه به مطالب ذکر شده ابعاد شبکه در ناحیه داخلی را 15×15 در نظر گرفته و کلیه نتایج با توجه به اینکه دمای اولیه برابر $300K$ است، بدست می آید.

حال به بررسی برخی از نتایج بدست آمده می پردازیم:

در این رابطه α ضریب نفوذ حرارتی می باشد. رابطه (۳۴) برای حالتی که Δx_i ، Δy_i از Δz_i بزرگتر هم باشند صادق است.

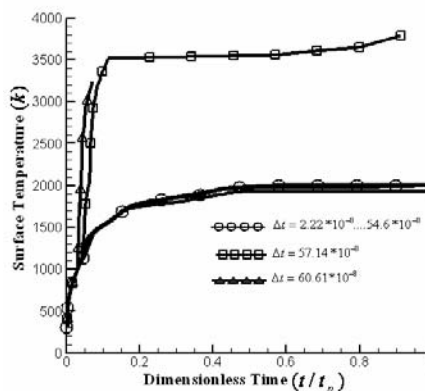
برای آلومینیوم با خواص حرارتی داده شده در بخش قبل در درجه حرارت معمولی $300K$ تقریباً بیشترین ضریب نفوذ حرارتی وجود دارد که برابر است با:

$$\alpha = 9.709 \times 10^{-5} \quad (35)$$

با انتخاب $\Delta z_i = 12 \mu m$ و $\tau = 0.2 \times 10^{-14}$ در معادله (۳۴) داریم [۱۳].

$$\Delta t_i \leq 4.96 \times 10^{-4} \text{ sec} \quad (36)$$

حال برای پیدا کردن Δt ، نمودار دمای مرکزی سطح بر حسب زمان بدون بعد در Δt های مختلف رسم می شود.



شکل (۹): نمودار دمای مرکزی سطح بر حسب زمان بدون بعد در Δt های مختلف

همانطور که مشاهده می شود نمودار در محدوده $\Delta t = 2.22 \times 10^{-8}$ تا $\Delta t = 54.6 \times 10^{-8}$ تقریباً یکسان است و تغییرات چندانی ندارد و دمای نهایی نقطه مرکزی سطح در تمام نمودارها در حدود $2000K$ می باشد.

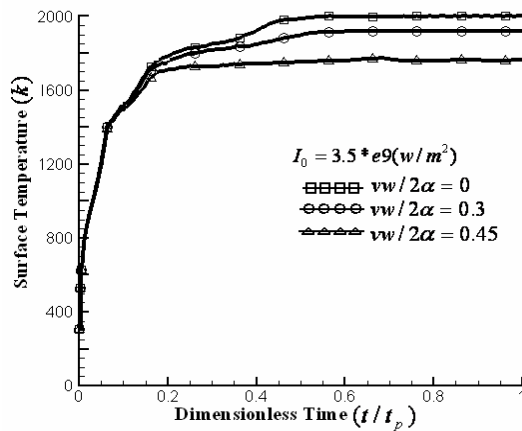
ولی هنگامی که به عنوان مثال $\Delta t = 57.14 \times 10^{-8}$ و $\Delta t = 60.6 \times 10^{-8}$ و یا بزرگتر فرض شود، برنامه کامپیوتری واگرا شده و جوابهای غیر معقولی بدست می آید. در حل عددی برنامه بوده و در رابطه (۳۶) نیز صدق می کند.

به روش مشابه یک رابطه برای Δt_o بدست می آید:

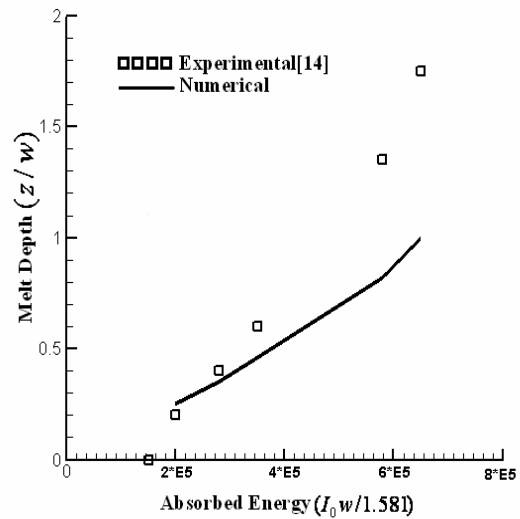
$$\Delta t_o \leq \frac{\Delta z_o^2}{6\alpha A} \quad (37)$$

روابط (۳۴) و (۳۷) نتیجه می دهند:

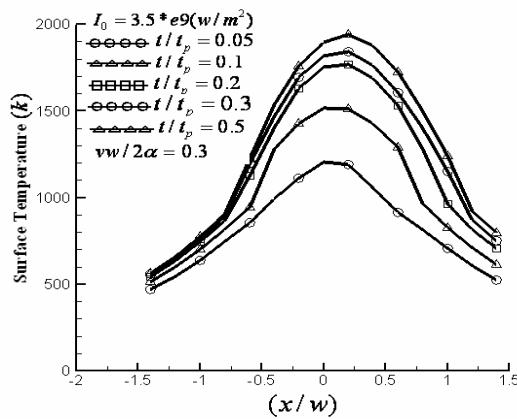
$$\frac{\Delta t_i}{\Delta t_o} = \left(\frac{\Delta z_i}{\Delta z_o}\right)^2 \quad (38)$$



شکل (۱۰): درجه حرارت نقطه مرکزی سطح برحسب زمان در سرعت‌های متفاوت در شدت $I = 3.5 \times e9$



شکل (۹): عمق حوضچه مذاب برحسب شدت مرکز اشعه لیزر (ثابت = w)



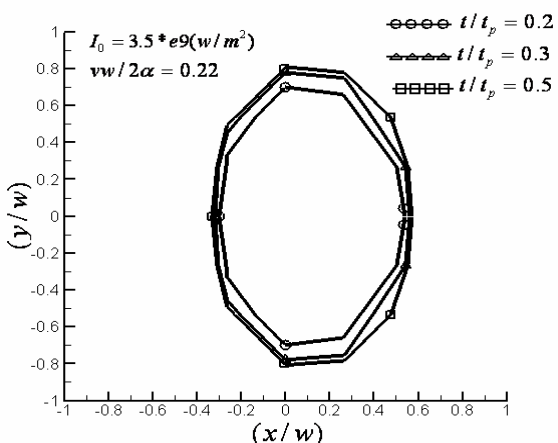
شکل (۱۱): تغییرات درجه حرارت نقاط واقع بر روی محور xها برحسب فاصله xها

شکل (۱۱) درجه حرارت نقاط مختلف محور x ها ($y = z = 0$) را در زمانهای متفاوتی نشان می‌دهد. با توجه به شکل دیده می‌شود که نقاطی که روی شاخه سمت راست منحنی‌ها قرار دارند به دلیل سرعت اشعه در جهت مثبت محور x ها دارای درجه حرارت بیشتری نسبت به نقاطی که روی شاخه سمت چپ منحنی‌ها قرار دارند، هستند. چون اشعه با سرعت مشخصی در جهت مثبت محور x ها حرکت می‌کند، نقاطی که روی شاخه‌های سمت راست قرار دارند نقاطی هستند که از مرکز اشعه که دارای بیشترین شدت است عبور کرده‌اند و بنابراین دارای درجه حرارت بیشتری، نسبت به نقاطی که روی شاخه‌های سمت چپ قرار دارند و هنوز از مرکز اشعه عبور نکرده‌اند می‌باشند.

در شکل (۹) بیشترین عمق حوضچه مذاب برحسب شدت اشعه با فرض اینکه تمام انرژی جذب سطح می‌شود و هیچ مقداری از آن انعکاس نمی‌یابد رسم شده است. همانطوری که از شکل پیداست به ازاء شدت‌های پائین، بین نتایج تجربی و عددی تطابق خوبی برقرار است اما در شدت‌های بالا به دلیل اینکه دمای سطح جسم، به دمای تبخیر می‌رسد نتایج عددی و تجربی از هم فاصله می‌گیرند. این رفتار را به این صورت می‌توان توجیه کرد که در شدت‌های بالا دمای سطح جسم، به دمای تبخیر می‌رسد. وقتی که دمای سطح جسم، به دمای تبخیر رسید، دو پدیده متقابل بر روی عمق حوضچه مذاب تأثیر می‌گذارند. اول اینکه مقداری از انرژی صرف تبخیر می‌شود و مقدار کمتری از انرژی جهت ذوب کردن جسم به کار می‌رود و دوم اینکه با تبخیر شدن قسمتی از مواد، سطوح با درجه حرارت بالا به طرف سطح مشترک جامد و مایع حرکت می‌کنند و این سبب می‌شود که عمق حوضچه مذاب عملاً بیشتر شود. در حل عددی، پدیده تبخیر در نظر گرفته نشده است و بنابراین در شدت‌های بالا که دمای سطح به دمای تبخیر می‌رسد، بین نتایج عددی و تجربی، تفاوت قابل ملاحظه‌ای پیش می‌آید.

در شکل (۱۰) تغییرات درجه حرارت نقطه مرکزی سطح برحسب زمان به ازاء سرعت‌های مختلف جسم، رسم شده است. در این شکل پارامتر $\sqrt{vw/2\alpha}$ ، سرعت بدون بُعد می‌باشد که w شعاع اشعه و α ضریب نفوذ حرارتی متوسط می‌باشد و هر دو ثابت در نظر گرفته شده‌اند. با افزایش سرعت جسم، دمای نقطه مرکزی آن کاهش می‌یابد و این نتیجه‌ای بدیهی است، چرا که وقتی سرعت جسم افزایش می‌یابد به ازاء زمانهای مساوی انرژی اشعه در سطح بیشتری از جسم اثر می‌کند و درجه حرارت نقطه مرکزی آن کمتر می‌شود.

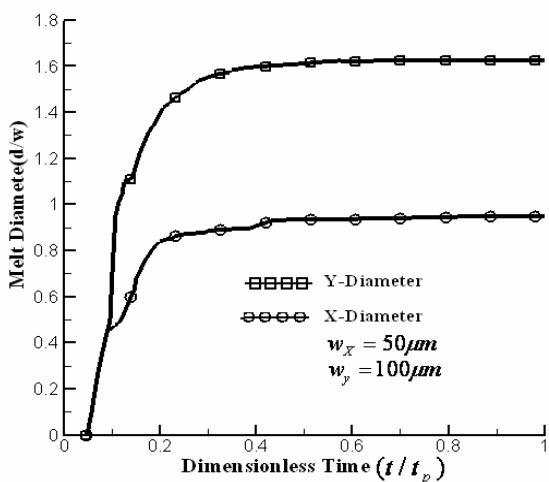
سمت چپ محور x ها خطوط دما ثابت دارای تمرکز بیشتری می باشد.



شکل (۱۴): تصویر حوضچه مذاب در صفحه $x-y$ در زمانهای

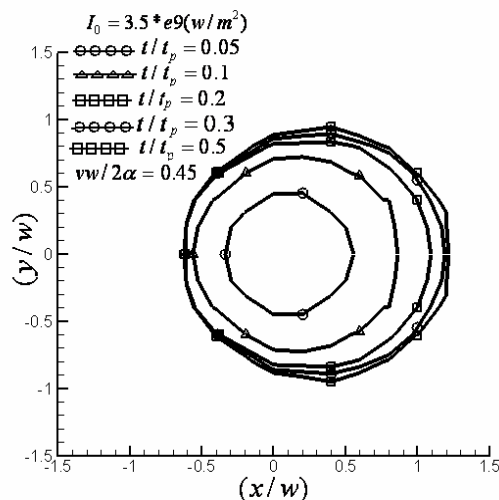
متفاوت برای اشعه بیضوی و $\frac{V_w}{2\alpha} = 0.22$

شکل (۱۴) تصویر حوضچه مذاب در صفحه $x-y$ را برای حالتی نشان می دهد که اشعه بکار گرفته شده به صورت بیضوی باشد. وقتی که سرعت در مسئله وارد می شود حوضچه مذاب از حالت تقارن خارج می شود و سرعت انتشار آن در جهت منفی محور x ها خواهد بود.



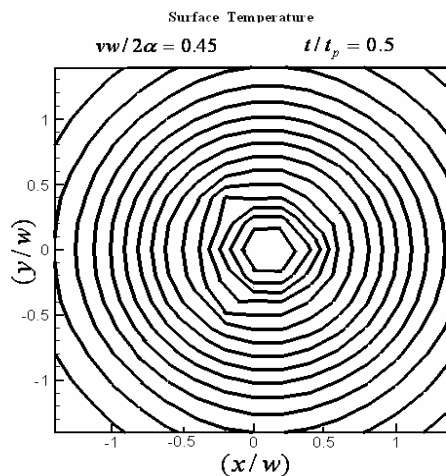
شکل (۱۵): قطر حوضچه مذاب بر روی محورهای x و y بر حسب زمان برای اشعه بیضوی

در شکل (۱۵) قطر حوضچه مذاب در جهت های x و y برای حالتی که سطح مقطع اشعه به صورت بیضی باشد، نشان داده شده است. در زمان های اولیه که هر دو قطر بر هم منطبق هستند، مربوط به مرحله ای است که برای بدست آوردن موقعیت اولیه حوضچه مذاب در صفحه $x-y$ حوضچه مذاب بصورت دایره ای فرض شده است.



شکل (۱۲): تصویر حوضچه مذاب در صفحه $x-y$ در زمانهای متفاوت برای اشعه دایره ای در سرعت $\frac{V_w}{2\alpha} = 0.45$

شکل (۱۲) تصویر حوضچه مذاب را در صفحه $x-y$ در زمانهای مختلف به ازای سرعت $\frac{V_w}{2\alpha} = 0.45$ نشان می دهند. در این شکل دیده می شود که به دلیل سرعت جسم، حوضچه مذاب به سمت راست تمایل پیدا می کند و با گذشت زمان قطر حوضچه مذاب افزایش یافته و در نهایت به یک مقدار ثابتی میل می کند.

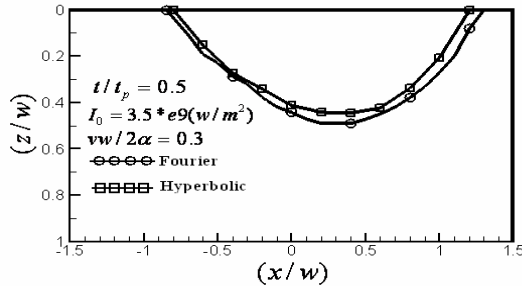


شکل (۱۳): منحنی های دما ثابت در صفحه $x-y$ برای اشعه

دایره ای و $\frac{V_w}{2\alpha} = 0.45$ در زمان $\frac{t}{t_p} = 0.5$

شکل (۱۳) منحنی دما ثابت را در صفحه $x-y$ در یک زمان ثابت و به ازاء شدت اشعه ثابت $I = 3.5 \times 10^9 (W/m^2)$ برای سرعت $\frac{V_w}{2\alpha} = 0.45$ نشان می دهد. اشعه به صورت دایره ای در نظر گرفته شده است و وجود سرعت باعث شده است که منحنی دما ثابت از حالت تقارن خارج شده و به سمت راست منحرف شود، بطوریکه در

قبل نیز قابل پیش‌بینی بود حوضچه مذاب به روش فوریه در جهت x-y بزرگتر از حوضچه مذاب به روش هذلولوی می‌باشد.



شکل (۱۸): تصویر حوضچه مذاب در صفحه x-z برای اشعه دایره‌ای به دو روش فوریه و هذلولوی

شکل (۱۸) تصویر حوضچه مذاب را در صفحه x-z در زمان $t/t_p = 0.5$ و به ازاء سرعت بدون بعد $\frac{VW}{2\alpha} = 0.45$ نشان می‌دهد. با توجه به شکل در می‌یابیم که حوضچه مذاب به روش فوریه در جهت x-z بزرگتر از حوضچه مذاب به روش هذلولوی می‌باشد.

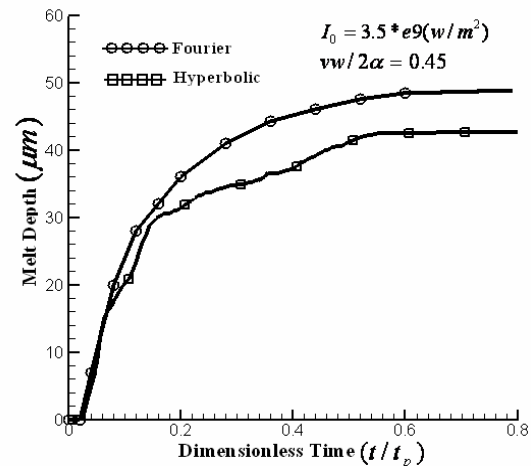
۵- نتیجه گیری

در این پروژه دما و شکل حوضچه مذاب برای یک جسم آلومینیومی تحت تابش اشعه لیزر بررسی شد. معادله بکار رفته برای حل مسئله معادله انتقال حرارت هذلولوی می‌باشد. علت استفاده از این معادله در مقایسه با معادله انتقال حرارت فوریه این است که معادله فوریه در زمانهای کوچک به دلیل نامحدود بودن انتشار موج حرارتی نتایج قابل قبولی ارائه نمی‌دهد. پس از بررسی نتایج و مقایسه با مسئله مشابه که به وسیله معادله فوریه حل شده است، مشاهده می‌شود که رشد میدان دما و حوضچه مذاب در حالت فوریه سریعتر از حالت هذلولوی می‌باشد که این موضوع از قبل نیز به دلیل نامحدود بودن سرعت موج حرارتی قابل پیش‌بینی بود. بنابراین به این نتیجه می‌رسیم که معادله انتقال حرارت هذلولوی در زمانهای کوچک و مکانهای بزرگ گزینه مناسبی است و نتایج قابل قبولی به ما می‌دهد.

۶- مراجع

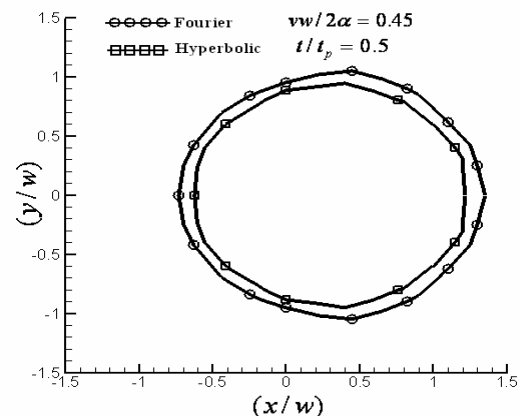
- [1] C. P. Grigoropoulos, W. E. Dutcher and A. F. Emery, "Experimental and computational analysis of laser melting of thin silicon films", J. of Heat transfer, vol. 113, PP: 21-29, 1991.

حال به مقایسه نتایج حاصل از این پروژه با نتایج حاصل از پروژه مشابه که با استفاده از معادله انتقال حرارت فوریه بدست آمده است، پرداخته می‌شود:



شکل (۱۶): تغییرات عمق حوضچه مذاب بر حسب زمان به دو روش فوریه و هذلولوی

شکل (۱۶) عمق حوضچه مذاب را بر حسب زمان به ازاء سرعت بدون بعد $\frac{VW}{2\alpha} = 0.45$ نشان می‌دهد. همانطور که از شکل پیداست عمق حوضچه مذاب به روش فوریه پیشروی بیشتری نسبت به روش هذلولوی دارد.



شکل (۱۷): تصویر حوضچه مذاب در صفحه x-y برای اشعه دایره‌ای به دو روش فوریه و هذلولوی

شکل (۱۷) تصویر حوضچه مذاب در صفحه x-y در زمان $t/t_p = 0.5$ و

به ازاء سرعت بدون بعد $\frac{VW}{2\alpha} = 0.45$ را نشان می‌دهد. همانطور از

- [8] N. M. Abdel- Jabbar, M. A. Ali. Nimr, "The Dual phase-lag heat conduction model in thin slab under fluctuating thermal disturbance" , Taylor & Francis, vol. 24, PP. 47-54, 2003.
- [9] A .A .Rostami, A. Raisi, "Temperature distribution and melt pool size in a semi-infinite body due to a moving laser heat source", Numerical Heat transfer, Part A. 31: 783-796, 1997.
- [10] Y. S. Touloukian, C. Y. Ho, "Eds, Thermophysical properties of Matters", plenum press, New York, vols. 1 and 4, 1972.
- [11] W.M. Rohsenow, J. P. Hartnett, "(Eds), Handbook of heat transfer fundamentals", chap3, Mc Graw Hill, New York, 1985.
- [12] R. Mehrabian, S.C.Kou Hsu, and A. Munitz, , "Laser surface melting and solidification moving heat flux", metallurgical Trans, vol. 14B, PP. 213-227, 1982.
- [13] Neilw. Ashcroft, N. Mermin, and David., "solid state physics"PP.10,1975.
- [2] A. A. Rostami, R.Greif and E. R. Russo, "Modified Enthalpy Method Applied to Rapid melting and solidification", to appeare in Int. J. Heat Mass Transfer.
- [3] A. A. Rostami, A. Raisi, "Temperature distribution and melt pool size in a semi-infinite body due to a moving laser heat source", Numerical Heat transfer, Part A. 31: 783-796, 1997.
- [4] C. Cattaneo, "A Form of conduction Equation Which Eliminates the Paradox of Instantaneous Propagation"Compt.Rend.,vol.247,PP. 431-442,1986.
- [5] P. Vernotte, "Paradox in the Continuous Theory of Heat Equation" Compt.Rend.,vol.246,PP. 3154-3159,1986.
- [6] M. H. Sadd, J. E. Didlake, , "Non- Fourier Melting of a same infinite solid", J. Heat Transfer 2 vol 81, PP. 25-28, 2001.
- [7] Jiang Fangming, "Non- Fourier heat conduction phenomena in porous material heated by microsecond laser pulse", Taylor & Francis, vol 6, PP. 331-346, 2002.