

تحلیل پایداری سیالات غیرنیوتنی با ویژگی غلیظشونده و رقیق‌شونده در شکاف باریک بین دو استوانه‌گردان

نریمان اشرفی خراسانی^۱، حبیب اله کریمی حقیقی^۲
Habib.karimi.h@gmail.com

پذیرش مقاله: ۸۹/۱۲/۱۵

دریافت مقاله: ۸۹/۰۹/۱۸

چکیده

اثر سیالات غیرنیوتنی با ویژگی غلیظشونده و رقیق‌شونده با افزایش نرخ برش بر روی پایداری جریان تیلور-کوئت با استفاده از مدل کرئو - برد در بین شکاف باریک مورد بررسی قرار گرفته است. بوسیله معادلات بقاء جرم و مومنتوم و با استفاده از روش گالرکین سیستم دینامیکی حاکم بر جریان تیلور - کوئت در شکاف باریک بدست آمده است. معادلات حاکم بدست آمده در مقایسه با سیال نیوتنی دارای عبارت‌های غیرخطی از مرتبه بالا می‌باشند. همانند سیالات نیوتنی یک تبادل پایداری بین جریان کوئت و گردابه‌های تیلور وجود دارد. نتایج بدست آمده حاکی از آن است که با افزایش خاصیت غلیظشوندگی سیال، جریان در اعداد تیلور بالاتری از حالت کوئت خارج شده و گردابه‌های تیلور تشکیل می‌شوند و برعکس برای سیالات رقیق‌شونده با افزایش خاصیت رقیق‌شوندگی در اعداد تیلور کمتر این اتفاق رخ خواهد داد. نتایج بدست آمده با تحقیقات موجود که تنها برای شرایط خاصی بدست آمده تطابق خوبی دارند.

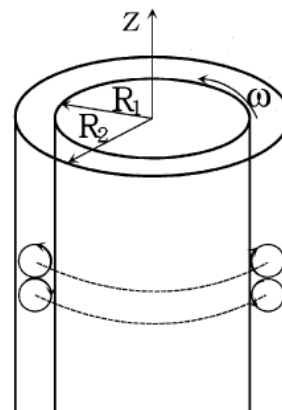
کلید واژه:

سیالات غلیظشونده - سیالات رقیق‌شونده - جریان تیلور-کوئت - مدل کرئو - برد - روش گالرکین - گردابه‌های تیلور

۱- استادیار، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات تهران، دانشکده مهندسی مکانیک و هوافضا، تهران، ایران
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات تهران، دانشکده مهندسی مکانیک و هوافضا، تهران، ایران

۱- مقدمه

جریان بین فضای دو استوانه هم‌مرکز با دوران استوانه داخلی درحالی‌که استوانه خارجی ثابت باشد به عنوان جریان تیلور-کوئت^۱ شناخته می‌شود که در شکل (۱) نشان داده شده است.



شکل (۱): جریان تیلور-کوئت بین استوانه‌های هم‌مرکز

عدد تیلور که بیانگر نسبت نیروهای گریز از مرکز به نیروهای ویسکوزیته است، معیاری جهت تعیین رژیم جریان می‌باشد. اکثر مطالعاتی که تاکنون در این زمینه انجام شده است به صورت تجربی و برای سیالات نیوتنی بوده و تنها در مواردی محدود به بررسی جریان سیالات غیرنیوتنی پرداخته شده است.

کولمن در تحقیق خود مدلی برای جریان تیلور-کوئت با در نظر گرفتن سیال نیوتنی معرفی کرد [۲]. در مدل معرفی شده توسط وی گردابه‌های تیلور پس از تشکیل شدن پایداری خود را حفظ کرده و به صورت نوسانی در نخواهند آمد. وی تحقیق خود را با در نظر گرفتن شکاف باریک بین دو استوانه، درحالی‌که استوانه داخلی با سرعت ثابت چرخیده و استوانه خارجی ثابت است انجام داد. همچنین برای حل معادلات کامل ناویراستوکس از روش تقریبی گالرکین استفاده کرده است. معادلات نهایی بدست آمده توسط وی بسیار مشابه با معادلات بدست آمده توسط لورنز، که مربوط به جریان سیال بر اثر اختلاف دما در لایه‌ای از هوا است می‌باشد [۳].

ورلی و لپتو رژیم‌های مختلف جریان تیلور-کوئت با جریان محوری را به صورت آزمایشگاهی مورد بررسی قرار داده‌اند [۴]. همچنین تحقیقات عددی انجام شده جهت بررسی این جریان بسیار محدود می‌باشد که یکی از کاملترین آن‌ها توسط هانگ و یانگ صورت گرفته است [۵]. آن‌ها با استفاده از روش حجم محدود جریان تیلور-کوئت با جریان محوری را در حالت‌های مختلف مورد بررسی قرار داده‌اند. اخیراً آلتیمیر و همکارانش، اثرات انتهایی دیواره در پایداری گردابه‌های ماریچ را از طریق آزمایشگاهی و تئوریکالی بررسی کرده‌اند [۶]. اما نگاهی واقعی به کاربردهای جریان تیلور-کوئت در صنعت بیانگر این است که در بیشتر موارد سیال عامل دارای رفتار غیرنیوتنی بوده و فرض سیال نیوتنی صحت چندانی ندارد. به این منظور در نظر گرفتن سیال غیرنیوتنی و بررسی رفتار آنها در جریان‌های تیلور-کوئت موضوعی است که مورد توجه پژوهشگران بوده و خواهد بود.

خیاط، پایداری جریان سیالات غیرنیوتنی ویسکوالاستیک را در جریان تیلور-کوئت بررسی کرده است [۷]. اشرفی و همکارانش اثرات حفره در جریان سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی بوگر در بین دو استوانه غیر هم‌مرکز را از طریق آزمایشگاهی بررسی کرده‌اند [۸].

لی و خیاط در تحقیق خود جریان سیالات رقیق‌شونده در شکاف باریک بین دو استوانه را با در نظر گرفتن شرایط مرزی سرعت صلب برای گردابه‌ها مطالعه کرده‌اند [۹]. وی برای حل معادلات بقا از روش گالرکین با در نظر گرفتن توابع چنددرسرخار^۴ [۱۰] استفاده کرده است. کورونادو، ناپایداری جریان کوئت بین دو استوانه را با در

جریان تیلور-کوئت دارای کاربردهای فراوانی در صنعت از جمله دستگاه‌های مخلوط کننده کوئت، جداکننده فیلتری دوار، یاتاقان‌ها، راکتورهای شیمیایی کاتالیک و جداکننده‌های مایع-مایع می‌باشد. در جریان تیلور-کوئت در صورت کم بودن سرعت دورانی استوانه داخلی و با فرض بینهایت بودن طول استوانه‌ها جهت صرف نظر کردن از اثرات دیواره انتهایی^۲ می‌توان یک حل تحلیلی برای میدان سرعت بدست آورد. اما این فرضیات همواره در فیزیکی واقعی مسئله صدق نمی‌کند. مخصوصاً با افزایش سرعت دوران استوانه داخلی ناپایداری‌هایی در میدان جریان دیده می‌شود. این ناپایداری‌ها اولین بار توسط تیلور در سال ۱۹۲۳ در مطالعه تحلیلی جریان تیلور-کوئت مشاهده شد [۱]. ناپایداری ذکر شده در ابتدا به صورت مجموعه‌ای از گرداب‌های افقی و متقارن نسبت به محور استوانه‌ها موسوم به TVF^۳ در خواهد آمد. باید به این نکته توجه داشت که خروج از حالت جریان لایه‌ای و تشکیل TVF به معنای آشفته شدن جریان نیست زیرا خطوط جریان هنوز در مسیر خود قرار دارند و با یکدیگر تداخل نمی‌کنند. در حالت کلی سرعت دورانی استوانه‌ها نسبت به یکدیگر تنها عامل تعیین کننده آغاز گردابی شدن جریان نیست، بلکه عوامل دیگری چون اندازه شکاف، شعاع جریان و ویسکوزیته سیال نیز در این زمینه موثر است و تغییر فقط یکی از آن‌ها می‌تواند سبب تغییر زمان تشکیل گردابه‌ها شود.

1-Taylor-Couette Flow

4- End-wall effects

5-Taylor vortex flow

$$Ta = Re^2 \varepsilon$$

در رابطه فوق Re ، عدد رینولدز، ε نسبت اندازه شکاف به شعاع و Ta ، عدد تیلور، d اندازه شکاف و V_0 ویسکوزیته سینماتیک در نرخ برش صفر می‌باشند. معادلات بقاء جرم و مومنوم برای این جریان عبارتند از:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (2)$$

$$\rho(\mathbf{U}_T + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U}) = -\nabla P + \nabla \cdot (\mu \dot{\boldsymbol{\Gamma}}) \quad (3)$$

در روابط فوق \mathbf{U} بردار سرعت، ρ چگالی، T زمان، P فشار، μ ویسکوزیته و $\dot{\boldsymbol{\Gamma}}$ تانسور نرخ برش هستند. ویرگول نیز به مفهوم مشتق ضمنی است. با توجه به تعداد متغیرهای موجود باید از پارامترهای بی‌بعد استفاده شود. در بین گروه‌های بی‌بعدی که می‌توان تعریف کرد باید آن گروهی انتخاب شود که ضرایب و مقادیر حاصل از آن در معادله از مرتبه یک باشد. معادلات بی‌بعدی که دارای چنین شرطی هستند عبارتند از [۱۲]:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{d}{v_0} U_r & x &= \frac{r - R_1}{d} \\ u_y &= \frac{1}{R_1 \Omega} U_\theta & z &= \frac{Z}{d} \\ u_z &= \frac{d}{v_0} U_z & t &= \frac{v_0}{d^2} T \\ p &= \frac{d^2}{\rho v_0} P & \eta &= \frac{\mu}{\mu_0} \end{aligned} \quad (4)$$

پارامترهای سمت چپ در معادلات بالا پارامترهای بی‌بعد می‌باشند. برای تعیین نحوه وابستگی ویسکوزیته به نرخ برش از مدل کرئو-برد استفاده شده‌است که رابطه آن به صورت زیر است [۱۳]:

$$(\mu - \mu_\infty) / (\mu_0 - \mu_\infty) = \left[1 + \left(\lambda \dot{\boldsymbol{\Gamma}} \right)^2 \right]^{\left(\frac{n-1}{2} \right)} \quad (5)$$

همچنین برای بی‌بعد سازی تانسور نرخ برش رابطه زیر بین $\dot{\boldsymbol{\Gamma}}$ و $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ (تانسور نرخ برش بی‌بعد) تعریف می‌شود:

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{d}{R_1 \omega} \dot{\boldsymbol{\Gamma}} \quad (6)$$

با معرفی عدد بی‌بعد $De = \frac{\lambda R_1 \omega}{d}$ و $S = \frac{\lambda R_1 \omega}{d}$ همچنین با صرف نظر از عبارتهای $O(De \gamma)^4$ در مدل کارو رابطه ویسکوزیته با نرخ برش به صورت ساده رابطه (۷) در می‌آید. قابل ذکر است که صرف نظر از عبارتهای $O(De \gamma)^4$ مستلزم آن است

نظر گرفتن سیالات رقیق شونده غیرالاستیک و با اعمال شرایط مرزی انتهایی در راستای طولی استوانه‌ها بررسی کرده‌است [۱۱]. با در نظر گرفتن سیالات غیرنیوتنی معادلات حاکم بر این جریان دارای عبارتهای غیرخطی از مرتبه بالا بوده و در نتیجه مطالعه پایداری و بی‌نظمی در این سیستم‌ها از اهمیت بالایی برخوردار خواهد بود. با این وجود در تحقیقات غیرنیوتنی صورت گرفته تنها به یافتن عدد تیلور بحرانی که گردابه‌های تیلور در آن شروع به شکل گرفتن می‌کنند اکتفا شده است و تنها در مواردی اندک به تحلیل بی‌نظمی معادلات پرداخته شده‌است [۱۲]. در این مقاله در ابتدا معادلات حاکم بر جریان سیال غیر نیوتنی در شکاف باریک بین دو استوانه بدست آمده و برای حل معادلات حاکم بر جریان با در نظر گرفتن شرایط مرزی مختلط برای سرعت جریان انحرافی از روش گالرکین استفاده شده، و برای وابستگی ویسکوزیته سیالات غیرنیوتنی مذکور به نرخ برش از مدل کرئو-برد^۵ [۱۳] استفاده شده‌است. معادلات برای حالت جریان پایا^۶ (مستقل از زمان) برای سیالات غیرنیوتنی با ویژگی غلیظ‌شونده^۷ و رقیق‌شونده^۸ حل شده‌اند و عدد تیلور بحرانی که از آن به بعد گردابه‌های تیلور شروع به شکل‌گیری می‌کنند برای هر دو نوع سیال بدست آمده‌است. همچنین با توجه به اینکه سیستم دینامیکی بدست آمده غیرخطی است برای حالت خاصی از جریان سیالات رقیق‌شونده معادلات به صورت گذرا^۹ (وابسته به زمان) حل شده و با استفاده از معیارهای تحلیل پایداری همچون دیاگرام فازی، توابع نمای لیاپانوف و پاوراسپکتروم به تحلیل پایداری و بی‌نظمی معادلات با توجه به افزایش عدد تیلور پرداخته شده‌است.

۲- فرمول‌بندی مسئله

جریان سیالات غیرنیوتنی رقیق شونده با افزایش نرخ برش تراکم ناپذیر در شکاف باریک بین دو استوانه متحدالمرکز با طول نامحدود که شعاع استوانه‌های کوچک و بزرگ به ترتیب R_1 و R_2 است را در نظر بگیرید. استوانه داخلی با سرعت ثابت ω در حل چرخش و استوانه خارجی ثابت است. اعداد بدون بعد در رابطه (۱) تعریف شده‌اند.

$$\begin{aligned} Re &= \frac{\omega R_1 d}{v_0} \\ \varepsilon &= \frac{d}{R_1} \end{aligned} \quad (1)$$

7-Carreau-Bird
6- Steady State
7- Shear Thickening
8-Shear Thinning
9- Transient

$$u'_{x,t} + u'_x u'_{x,x} + u'_z u'_{x,z} - \text{Tau}'_y - \text{Tau}'_y (1-x) = p'_{,x} + (\eta^0 + \eta')(u'_{x,xx} + u'_{x,zz}) + 2\eta'_{,x} u'_{x,x} + \eta'_{,x} (u'_{x,z} + u'_{z,x}) \quad (14)$$

$$u'_{y,t} + u'_x u'_{y,x} + u'_z u'_{y,z} = u'_x + (\eta^0 + \eta')(u'_{y,xx} + u'_{y,zz}) + 2\eta'_{,z} u'_{y,z} + \eta'_{,x} (u'_{y,x} + 1) \quad (15)$$

$$u'_{z,t} + u'_x u'_{z,x} + u'_z u'_{z,z} = -p'_{,x} + u'_x + (\eta^0 + \eta')(u'_{z,xx} + u'_{z,zz}) + 2\eta'_{,z} u'_{z,z} + \eta'_{,x} (u'_{x,z} + u'_{z,x}) \quad (16)$$

شرایط مرزی برای جریان انحرافی نیز به صورت زیر می‌باشد:

$$x = 0, x = 1 \leftrightarrow u_x = u_y = u_{z,x} = 0 \quad (17)$$

صفر بودن گرادیان u'_z در جهت عمود بر دیواره نشان‌دهنده لغزش آزاد روی دیواره در جهت محوری است.

۳- روش تصویر کردن گالرکین و سیستم دینامیکی

معادلات دیفرانسیل بدست آمده در معادلات (۱۳) تا (۱۶) از نوع غیرخطی و با مشتقات جزئی است و حل آن به صورت معمول دشوار است. برای ساده کردن حل از روش تصویر کردن گالرکین استفاده شده است. استفاده از روش گالرکین در حل معادلات بقا در جریان تیلور-کوئت قبلاً در تحقیقات دیگر نیز مورد استفاده قرار گرفته است [۲]، [۹]. روش تصویر کردن شامل بسط دادن سرعت‌های جریان انحرافی بر حسب توابع متعامد و تصویر کردن معادلات (۱۳) تا (۱۶) روی هر کدام از توابع فوق جهت کاستن از تعداد متغیرها است. انتخاب توابع متعامد به هندسه جریان و شرایط مرزی (در اینجا معادلات (۱۷)) بستگی دارد. بدلیل اینکه گردابه‌های تیلور (TVF) ساختاری تکرارشونده دارند، جواب‌هایی تناوبی شامل مودهای سینوسی و کسینوسی بر حسب X و Z انتخاب شده‌اند. توابع انتخاب شده در این تحقیق، توسط کولمن [۲]، برای جریان سیالات نیوتنی تیلور-کوئت معرفی شده است. توسط این روش دستگاهی از معادلات دیفرانسیل معمولی با متغیرهای زمان و توابعی که همان ضرایب جملات بسط هستند بدست می‌آید. برای ساده‌تر شدن از آوردن علامت پرایم برای سرعت‌های جریان انحرافی

که $\left(De \dot{\gamma} \right) << 1$ باشد [۱۲].

$$\eta(\dot{\gamma}) = 1 + \alpha \dot{\gamma}^2 \quad (7)$$

به عنوان شاخص غیرنیوتنی بودن در $\alpha = (1-s) \left(\frac{n-1}{2} \right) De^2$

نظر گرفته می‌شود، که برای سیالات رقیق‌شونده مقدار آن منفی و برای سیالات غلیظ‌شونده مقدار آن مثبت است.

برای تحلیل پایداری بهتر است معادلات بقا و ویسکوزیته به صورت مجموع عبارات‌های جریان لایه‌ای و انحرافی نوشته شوند تا کنترل بهتری برای هر دو حالت جریان حاصل شود.

$$\begin{aligned} u'_x &= u_x - u_x^0 \\ u'_y &= u_y - u_y^0 \\ u'_z &= u_z - u_z^0 \\ p' &= p - p^0 \\ \eta' &= \eta - \eta^0 \end{aligned} \quad (8)$$

در معادلات (۸) علامت پرایم نشان دهنده کمیت‌های جریان انحرافی، کمیت‌های بدون علامت نشان دهنده عبارات‌های کلی جریان و کمیت‌های با بالانویس صفر عبارات‌های جریان لایه‌ای می‌باشند. پس از ساده‌سازی معادلات بقا برای جریان لایه‌ای یعنی در حالتی که هنوز گردابه‌های تیلور تشکیل نشده است رابطه سرعت و فشار برای این جریان به صورت زیر در آمده است.

$$u_y^0 = 1 - x \quad (9)$$

$$P'_{,x} = \text{Ta}(1-x)^2 \quad (10)$$

با جاگذاری مقدار عددی تانسور نرخ برش بی‌بعد در رابطه (۷) رابطه ویسکوزیته برای جریان لایه‌ای و انحرافی به صورت روابط (۱۱) و (۱۲) در خواهد آمد.

$$\eta^0 = 1 + \alpha \quad (11)$$

$$\eta' = \alpha \left[u'^2_{y,x} - 2u'_{y,x} + u'^2_{y,z} \right] \quad (12)$$

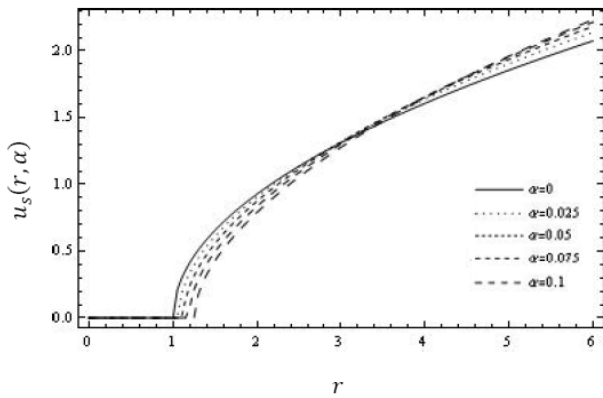
با جاگذاری مقادیر بدست آمده از تحلیل جریان لایه‌ای و استفاده از روابط (۱۱) و (۱۲) برای ویسکوزیته و پس از ساده‌سازی برای دیگر عبارات‌های معادلات بقا معادلات نهایی به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$u'_{x,x} + u'_{z,z} = 0 \quad (13)$$

صرف نظر شده است.

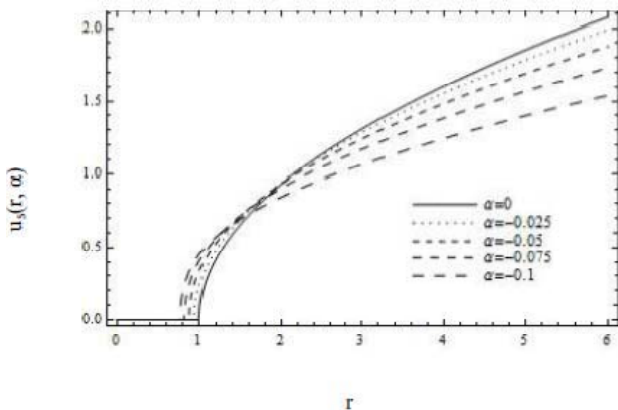
غیرنیوتنی برای سیالات غلیظ شونده $\alpha \in [0.0, 0.1]$ نسبت به عدد تیلور کاهش یافته رسم شده است. برای جلوگیری از تکرار از آوردن دو ترم دیگر مولفه های جریان انحرافی (w_s و v_s) صرف نظر شده است.

همانطور که از شکل (۲) واضح است متناسب با میزان شاخص غیرنیوتنی در مقادیری مشخص از r جریان انحرافی شروع به شکل گیری می کند که عدد تیلور بحرانی نام دارد و با r_c نشان داده می شود. برای سیالات نیوتنی ($\alpha = 0$)، $r_c = 1$ است. با افزایش خاصیت غلیظ شوندگی سیال (افزایش α) جریان انحرافی در سرعت دوران بالاتر و در نتیجه در اعداد تیلور بحرانی بالاتر شروع به شکل گیری می کند.



شکل (۲): منحنی های u_s به ازای مقادیر مختلف α برای سیالات غلیظ شونده

در شکل (۳) سرعت انحرافی u_s برای مقادیر مختلف شاخص غیرنیوتنی برای سیالات رقیق شونده $\alpha \in [0.0, -0.1]$ نسبت به عدد تیلور کاهش یافته رسم شده است. با افزایش خاصیت رقیق شوندگی سیال (افزایش $|\alpha|$) جریان زودتر بحرانی شده است.



شکل (۳): منحنی های u_s به ازای مقادیر مختلف α برای سیالات رقیق شونده

$$u_x(x, z, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{nm}(t) \text{Sinn}\pi x \text{Cosm}kz \quad (18)$$

$$u_y(x, z, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} v_{nm}(t) \text{Sinn}\pi x \text{Cosm}kz \quad (19)$$

$$u_z(x, z, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{nm}(t) \text{Cosn}\pi x \text{Sinn}mkz \quad (20)$$

در معادلات فوق k عدد موج و m تعداد موج های شکل گرفته روی هر گرداب در جهت زاویه ای است. برای نمایش ساده تر روابط از آوردن علامت پرایم با استفاده از روابط فوق برای سرعت های جریان انحرافی و بکار بردن روش گالرکین معادلات زیر بر حسب سرعت های مقیاس بندی شده به صورت زیر در می آید.

$$\dot{u} = rv - u - \frac{\alpha}{2} \left\{ (4-b)(b-2) + \frac{9}{b} - 2 \right\} uv^2 + 2(2-b)uw^2 - (b-2)uw + 2u \quad (21)$$

$$\dot{v} = -uw + u - v - \frac{\alpha}{2} \left\{ \left[\frac{9}{b} + b - 4 \right] v^3 + 2(b+2)vw^2 - 2(b-2)vw + (b+2)v \right\} \quad (22)$$

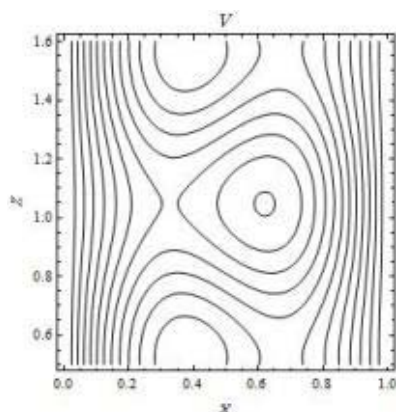
$$\dot{w} = uv - bw - \frac{\alpha}{2} \{ 6bw^3 + 2(b+2)v^2w + (b+2)v^2 + 6bw \} \quad (23)$$

$r = Ta\tau^3 k^2$ عدد تیلور کاهش یافته و $b = 4\pi^2 \tau$ می باشد. سیستم دینامیکی بدست آمده با در نظر گرفتن $\alpha \rightarrow 0$ به سیستم دینامیکی حاکم بر جریان تیلور-کوئرت نیوتنی که توسط کولمن [۲] بدست آمده بود تبدیل خواهد شد، که این امر صحت روابط (۲۱) تا (۲۳) را نشان می دهد. در این مقاله مقدار k عدد ۶ در نظر گرفته شده است.

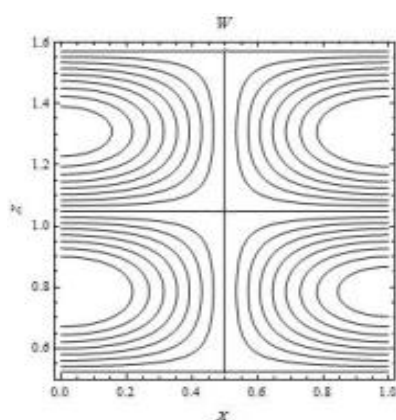
۴- حل معادلات برای حالت جریان پایا

به منظور تعیین عدد تیلور بحرانی که در آن جریان از حالت لایه ای (جریان کوئرت) خارج شده و گردابه های تیلور (TVF) تشکیل می شوند معادلات (۲۱) تا (۲۳) برای حالت مستقل از زمان با استفاده از نرم افزار متمتیکا^۱ حل شده اند. در شکل (۲) مولفه انحرافی در راستای شعاعی (u_s) برای مقادیر مختلف شاخص

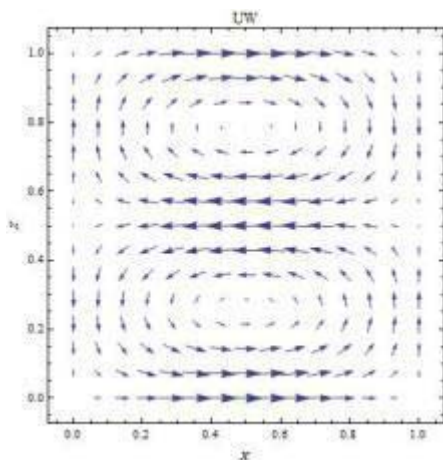
در شکل‌های (۵) تا (۸) کانتورهای سرعت کل (مجموع لایه‌ای و انحرافی) برای حالت پایدار آورده شده‌اند. همچنین در شکل (۵) خط‌های جریان در مقطع XZ نمایش داده شده‌است.



شکل (۶): نمایش کانتور سرعت V در مقطع XZ ($r=3$)



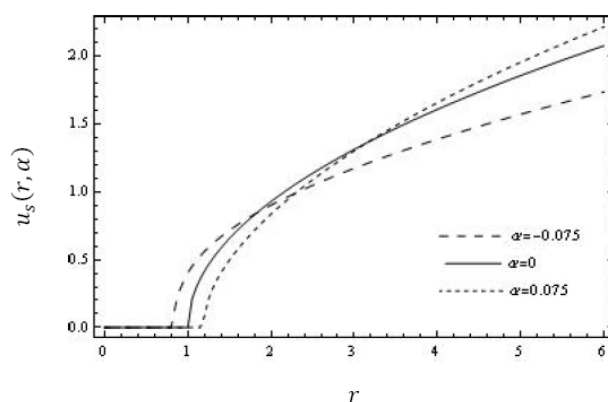
شکل (۷): نمایش کانتور سرعت W در مقطع XZ ($r=3$)



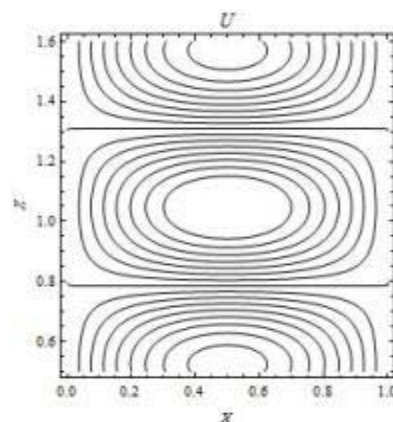
شکل (۸): نمایش خط‌های جریان در مقطع XZ ($r=3$)

نتیجه بدست آمده برای سیالات رقیق‌شونده با نتایج بدست آمده در مرجع [۹] که با در نظر گرفتن شرایط مرزی صلب برای جریان انحرافی بوده است نیز مطابقت دارد.

برای مقایسه بین اعداد تیلور بحرانی در جریان سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی با ویژگی غلیظ شونده و رقیق شونده در شکل (۴) مولفه u_s برای هر سه حالت نیوتنی و غیرنیوتنی با $|\alpha|=0.075$ آورده شده‌است. همانطور که در شکل هم واضح است با افزایش چسبندگی سیال گردابه‌های تیلور در سرعت دوران بالاتری تشکیل شده‌اند.



شکل (۴): منحنی بدست آمده برای u_s برای سیال رقیق شونده ($\alpha = -0.075$) و غلیظ شونده شونده ($\alpha = 0.075$)



شکل (۵): نمایش کانتور سرعت u در مقطع XZ ($r=3$)

۳- کانتورهای سرعت

با افزایش سرعت دوران استوانه داخلی و در نتیجه آن افزایش عدد تیلور و رسیدن آن به مقدار بحرانی جریان از حالت لایه‌ای در آمده و گردابه‌های تیلور شروع به شکل گرفتن کرده‌اند. گردابه‌های تیلور به تعداد زوج تشکیل شده که هر جفت گرداب مجاور در خلاف جهت یکدیگر دوران می‌کنند. برای درک بیشتر گردابه‌های تشکیل شده،

$$A = \begin{bmatrix} \frac{d\dot{u}}{du} & \frac{d\dot{u}}{dv} & \frac{d\dot{u}}{d\dot{w}} \\ \frac{d\dot{v}}{du} & \frac{d\dot{v}}{dv} & \frac{d\dot{v}}{d\dot{w}} \\ \frac{d\dot{w}}{du} & \frac{d\dot{w}}{dv} & \frac{d\dot{w}}{d\dot{w}} \end{bmatrix} \quad (24)$$

مؤلفه‌های ماتریس فوق به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$A_{11} = 1 - \alpha - \frac{\alpha}{2} a_1 v_s^2 - \frac{\alpha}{2} a_2 w_s^2 - \frac{\alpha}{2} w_s \quad (25)$$

$$A_{12} = r - \alpha a_1 u_s v_s \quad (26)$$

$$A_{13} = -\alpha a_2 u_s v_s - \frac{\alpha}{2} a_3 u_s \quad (27)$$

$$A_{21} = -w_s + 1 \quad (28)$$

$$A_{22} = -1 - \frac{3}{2} \alpha b_1 v_s^2 - \frac{\alpha}{2} b_2 w_s^2 - \frac{\alpha}{2} b_3 w_s - \frac{\alpha}{2} b_4 \quad (29)$$

$$A_{23} = -u_s - b_2 v_s w_s - \frac{\alpha}{2} b_3 v_s \quad (30)$$

$$A_{31} = v_s \quad (31)$$

$$A_{32} = u_s - \alpha c_1 v_s w_s - \alpha c_2 v_s \quad (32)$$

$$A_{33} = -b - 9b\alpha w_s^2 - \frac{\alpha}{2} c_1 v_s^3 - 3ab \quad (33)$$

در مولفه‌های ماتریس ذکر شده کلیه پارامترها دارای مقادیر مشخص هستند و تنها پارامترهای u_s و v_s و w_s متغیرهای وابسته به Γ هستند. که اندیس S نشان دهنده جریان پایدار است که مقادیر آن در مرحله قبل بدست آورده شده‌است. لذا مقادیر ویژه تنها وابسته به Γ بوده و به ازای Γ های مختلف قابل محاسبه می‌باشند. با بدست آوردن مقادیر ویژه Γ بحرانی بعدی مقدار 0.95 است تا قبل از این عدد مقادیر ویژه اعداد حقیقی هستند ولی بعد از این عدد مقادیر λ_1 و λ_2 موهومی می‌شود. به ازای $r = 6/82$ قسمت حقیقی مقادیر ویژه موهومی برابر صفر می‌شود و این نقطه نیز جزء نقاط بحرانی به شمار می‌آید. سایر مقادیر بحرانی را نمی‌توان با استفاده از مقادیر ویژه بدست آورد. برای بدست آوردن این مقادیر باید از نمودارهای پارامتر سرعت بر حسب زمان یا نمودارهای فازی استفاده کرد. با بررسی این نمودارها مشخص شده است که در $3/58$ $r =$ دیگرام فاز پارامترهای سرعت u و v و w تغییر شکل کلی می‌دهد. به این صورت که تا قبل از این نقطه نمودار فاز به صورت مجموع مسیرهای محدود به دور یک نقطه خاص به ازای مقادیر

۵- بی‌نظمی سیستم‌های غیرخطی

بی‌نظمی یا آشوب، یک رفتار طولانی مدت غیرپریودیک در یک سیستم غیرخطی است که وابستگی حساس به شرایط اولیه دارد. منظور از رفتار طولانی مدت غیرپریودیک در سیستم‌های دینامیکی آن است که مسیرهایی وجود دارند که وقتی زمان به بی‌نهایت میل می‌کند، مسیر این سیستم‌ها به نقاط ثابت، مدارهای پریودیک و یا مدارهای شبه‌پریودیک منتهی نمی‌شوند. آشوب گویای آن است که سیستم دارای پارامترها یا ورودی‌های تصادفی نیست ولی رفتار بی‌نظم این سیستم‌ها از غیرخطی بودن ناشی می‌شود.

منظور از حساس بودن به شرایط اولیه در سیستم‌های دینامیکی این است که مسیرهای مجاور با سرعت و به طور نمایی از هم جدا می‌شوند. در واقع این خصوصیت، تفاوت اصلی سیستم‌های دینامیکی آشوبناک با سیستم‌های غیرآشوبناک است. در سیستم‌های دینامیکی غیرآشوبناک، اختلاف کوچک اولیه در دو مسیر به عنوان خطای اندازه‌گیری بوده و به طور خطی با زمان افزایش پیدا می‌کند در حالی که در سیستم‌های دینامیکی آشوبناک، اختلاف بین دو مسیر با فاصله بسیار اندک همانطوری که گفته شد، به طور نمایی افزایش می‌یابد.

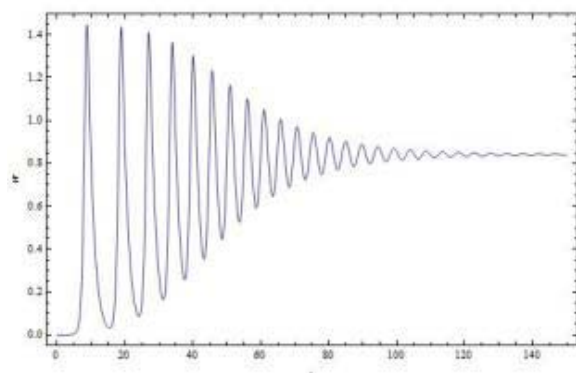
از آنجا که معادلات حاکم بدست آمده برای سیال غیرنیوتنی در جریان تیلور-کوئت، معادلات (۲۱) تا (۲۳)، نیز دارای پارامترهای غیرخطی می‌باشد بنابراین انتظار می‌رود که در مقادیر مختلف عدد تیلور از خود رفتارهای منظم و غیر منظم نشان داده و بنابراین به شرایط اولیه حساس باشند.

۶- تحلیل پایداری و بی‌نظمی سیستم دینامیکی مسئله

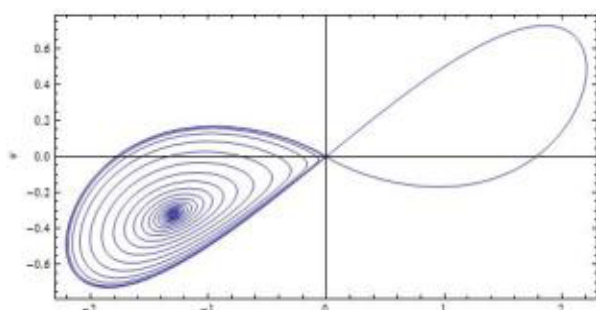
در این قسمت به تحلیل پایداری و بی‌نظمی معادلات (۲۱) تا (۲۳) می‌پردازیم. از آنجا که سیالات غلیظ شونده با افزایش عدد تیلور دچار بی‌نظمی یا آشوب نمی‌شوند در این قسمت تنها سیالات رقیق شونده با $\alpha = -0.075$ تحلیل شده‌است.

معیارهای مختلفی برای پی بردن به پایداری جریان وجود دارد. همانطور که در حل پایدار نیز بیان شد ابتدا معادلات را در حالت مستقل از زمان نوشته و معادلات را به ازای مقادیر مختلف Γ حل می‌کنیم. با حل این معادلات اولین مقدار Γ که در آن جریان انحرافی آغاز می‌شود بدست می‌آید که مقدار آن برای سیالات رقیق شونده برابر با 0.82 می‌باشد. سپس مقادیر ویژه معادلات را در حالت وابسته به زمان برای Γ های مختلف محاسبه می‌کنیم و به تجزیه و تحلیل آن می‌پردازیم. برای این منظور مقادیر ویژه ماتریس زیر را بدست می‌آوریم [۱۴].

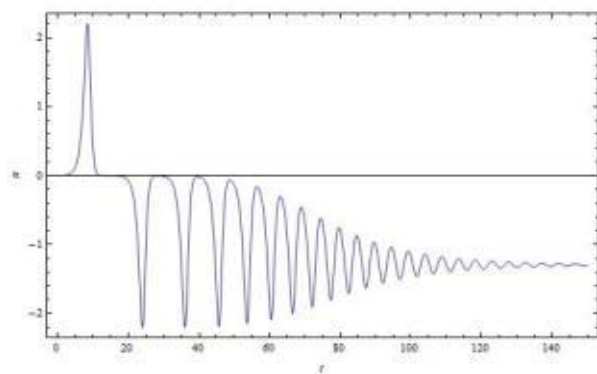
مختلف زمان حرکت می‌کند. در شرایطی که به ازای τ های بزرگتر از این مقدار شکل نمودار فازی پارامترهای سرعت دارای یک حلقه دیگر نیز می‌شود. اما حرکت به دور این حلقه شروع نمی‌شود. البته از روی نمودارهای تغییرات سرعت بر حسب زمان هم می‌توان این نقطه را بدست آورد بدین صورت که تا قبل از این نقطه پارامترهای سرعت u و v مثبت بوده و بعد از این نقطه u و v منفی می‌شود ولی w به صورت مثبت باقی می‌ماند. نکته قابل توجه این است که در هر دو حالت قبل و بعد از این نقطه به ازای t (زمان) بی‌نهایت پارامترهای سرعت به سمت یک عدد خاص میل می‌کند.



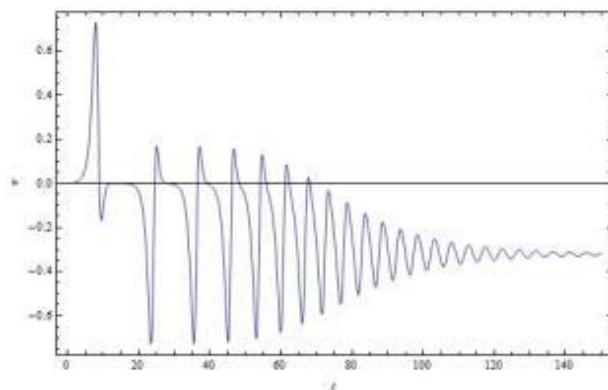
شکل (۱۲): تغییرات پارامتر سرعت w بر حسب زمان ($\tau=3/57$)



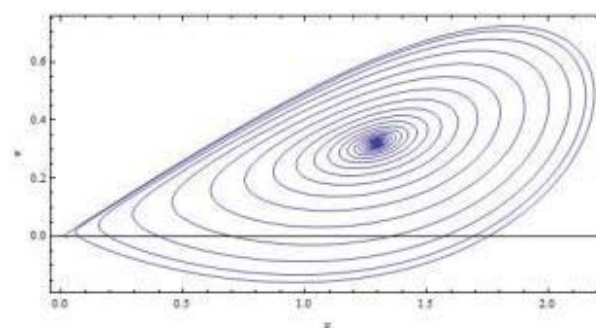
شکل (۱۳): نمایش فازی سرعت های u, v . ($\tau=3/58$)



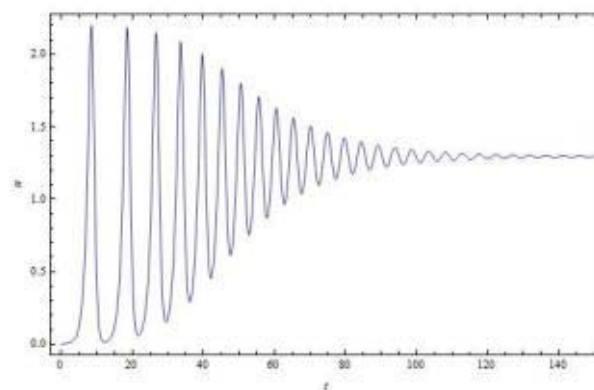
شکل (۱۴): تغییرات پارامتر سرعت u بر حسب زمان ($\tau=3/58$)



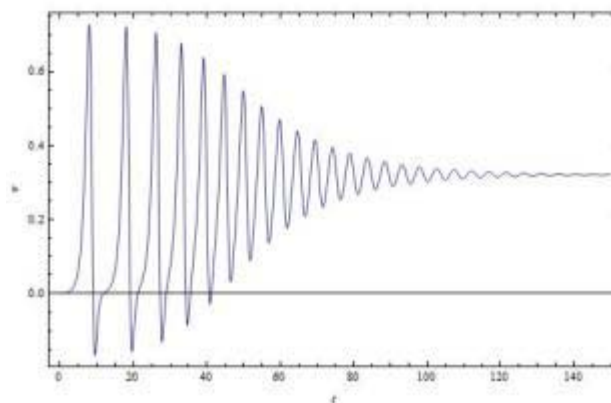
شکل (۱۵): تغییرات پارامتر سرعت v بر حسب زمان ($\tau=3/58$)



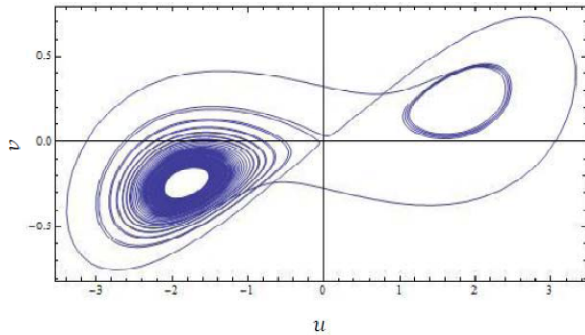
شکل (۹): نمایش فازی سرعت های u, v . ($\tau=3/57$)



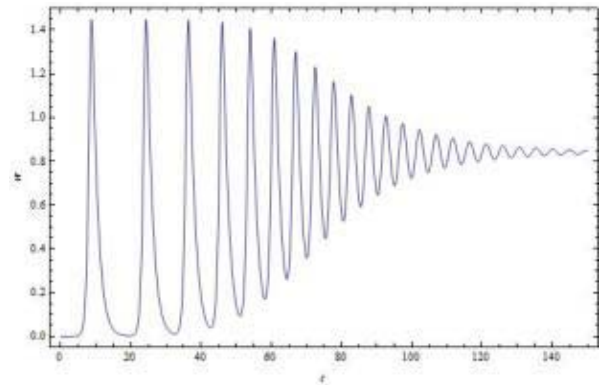
شکل (۱۰): تغییرات پارامتر سرعت u بر حسب زمان ($\tau=3/57$)



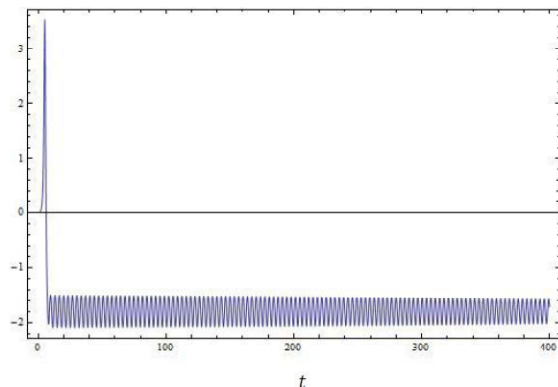
شکل (۱۱): تغییرات پارامتر سرعت v بر حسب زمان ($\tau=3/57$)



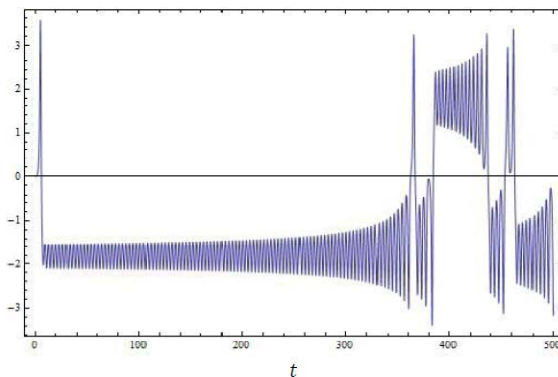
شکل (۱۸): نمایش فازی سرعت‌های u, v ($r=6/6$)



شکل (۱۶): تغییرات پارامتر سرعت w بر حسب زمان ($r=3/58$)

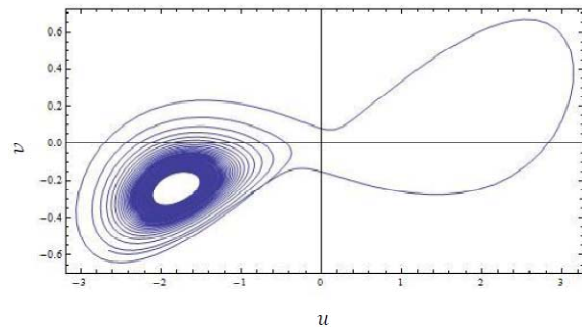


شکل (۱۹): تغییرات پارامتر سرعت u بر حسب زمان ($r=6/59$)



شکل (۲۰): تغییرات پارامتر سرعت u بر حسب زمان ($r=6/6$)

نقطه بحرانی بعدی که از روی منحنی‌های فازی قابل تشخیص می‌باشد، نقطه $r=6/59$ است. از این نقطه به بعد نمودار فازی پارامترهای سرعت شروع به گردش به دور نقطه دوم و تشکیل حلقه‌های محدود به دور این نقطه می‌کند. همچنین از روی نمودارهای وابسته به زمان نیز این مطلب قابل تأیید است. تا قبل از این نقطه به ازای زمان بی‌نهایت پارامترهای سرعت u و v و w به سمت عددی خاص میل می‌کند ولی بعد از این نقطه به ازای زمان بی‌نهایت مقادیر u و v و w به صورت متناوب باقی می‌ماند. در شکل (۱۷) نمودار فازی برای $r=6/59$ و در شکل (۱۸) نمودار فازی برای $r=6/6$ نشان داده شده‌است. همچنین شکل‌های (۱۹) و (۲۰) نیز تغییرات پارامتر سرعت u را برترتیب در $r=6/59$ و $r=6/6$ بر حسب زمان نمایش می‌دهند.

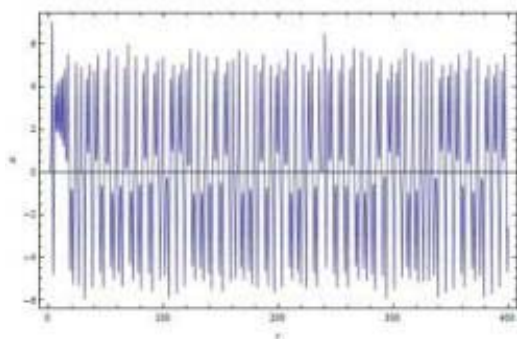


شکل (۱۷): نمایش فازی سرعت‌های u, v ($r=6/59$)

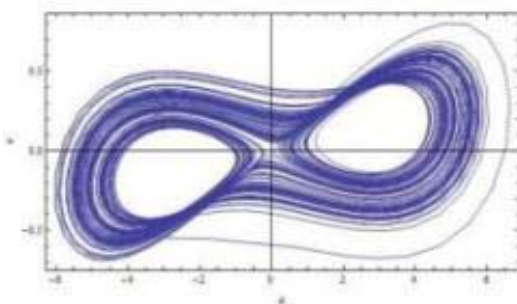
نمای لیاپانوف روشی سودمند در تحلیل پایداری است. با استفاده از این روش مقادیری از Γ که در آن سیستم رفتاری منظم از خود نشان می‌دهد بدست می‌آید. بدین صورت که در مقادیری از Γ که ماکزیمم نمای لیاپانوف منفی و یا نزدیک به صفر است سیستم دینامیکی رفتاری منظم از خود نشان می‌دهد. در حالیکه با مثبت شدن نمای لیاپانوف سیستم به سمت بی‌نظمی پیش خواهد رفت. در شکل (۲۱) ماکزیمم مقدار نمای لیاپانوف بر حسب عدد تیلور رسم شده‌است.

به ازای های بزرگتر از $6/59$ منحنی‌های u و v و w به صورت متناوب درآمده و تحلیل آنها با استفاده از نمودارهای فازی سرعت مشکل است. لذا در این شرایط از روش‌های دیگری مانند نمای لیاپانوف، تابع اتوکورلیشن و تابع پوراسپکتروم برای بررسی بی‌نظمی سیستم معادلات غیرخطی استفاده می‌شود. که در این مقاله از روش اول و سوم جهت تحلیل استفاده شده‌است.

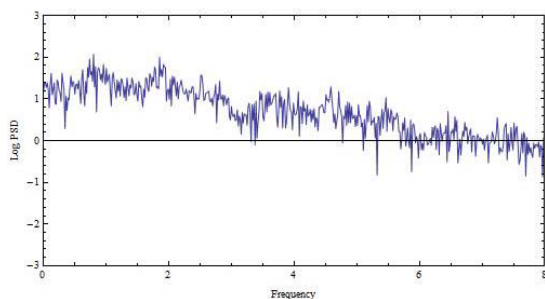
نشان دهد. با توجه به نمودارهای پاوراسپکتروم و فازی هم این امر مشهود است. قابل ذکر است که نمودار پارامتر سرعت بر حسب زمان کمک زیادی در تحلیل پایداری این نواحی نکرده و تنها به عنوان نمونه نحوه تغییرات پارامتر سرعت u بر حسب زمان در شکل (۲۲) آورده شده است.



شکل (۲۲): تغییرات پارامتر سرعت u بر حسب زمان ($r=18/5$)

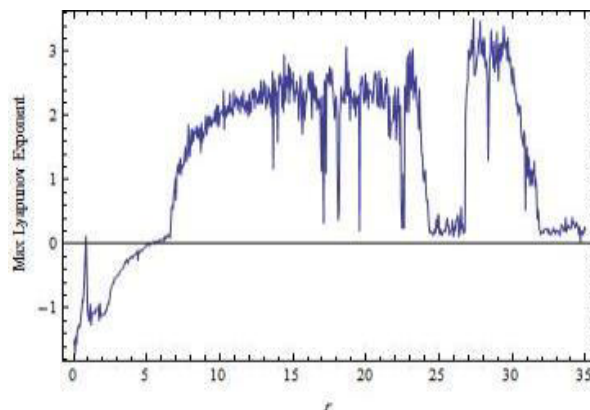


شکل (۲۳): نمایش فازی سرعتهای u و \dot{u} ($r=18/5$)



شکل (۲۴): نمودار پاوراسپکتروم ($r=18/5$)

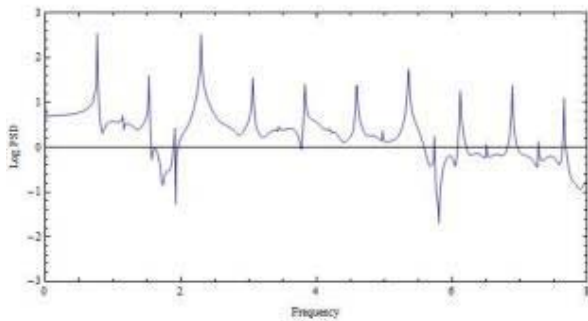
با رسم نمودار پاوراسپکتروم و فازی در محدوده $r=24$ تا $r=27$ مقدار عدد تیلور کاهش یافته‌ای که در آن سیستم رفتاری کاملاً پریودیک و منظم از خود نشان می‌دهد بدست می‌آید. در شکل‌های (۲۵) تا (۳۰) بوجود آمدن رفتار منظم پریودیک با تغییرات r نشان



شکل (۲۱): نمودار ماکزیمم نمای لیپانوف با افزایش عدد تیلور

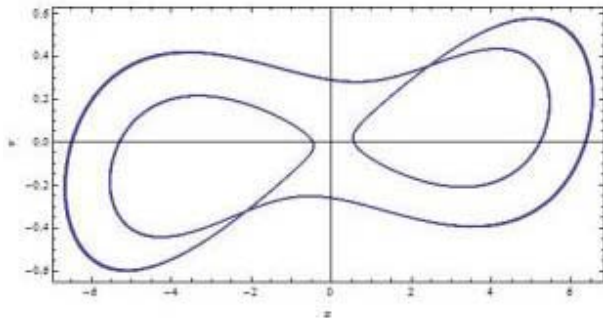
همانطور که در شکل (۲۱) دیده می‌شود در $r=0/83$ ماکزیمم نمای لیپانوف به سمت صفر می‌رود که این امر گویای آن است که در این مقدار r ، سیستم به سمت ناپایداری رفته است ولی پایدار باقی می‌ماند. با افزایش r سیستم دینامیکی دوباره منظم شده و این نظم تا مقدار $r=6/59$ برقرار است. تحلیل پایداری جریان تا عدد تیلور ذکر شده همانطور که مشاهده شد توسط نمودارهای پارامتر سرعت بر حسب زمان و نمودار فازی قابل تحلیل بود. در این قسمت هم نتایج نمای لیپانوف نتایج بدست آمده را تأیید می‌کند. ولی با افزایش عدد تیلور کاهش یافته از این مقدار به بعد نمودار پارامترهای سرعت به صورت نامنظم با گذشت زمان تغییر می‌کنند اما در مقادیری خاص این بی‌نظمی به صورت نوسانی منظم در می‌آید که از روی نمودار نمای لیپانوف محدوده آن براحتی قابل تشخیص است. در واقع نمودار لیپانوف در حکم یک راهنمای مسیر است که مشخص می‌کند در کدام محدوده باید به دنبال سیستم منظم نوسانی باشیم و دیگر نیازی به انجام تحلیل پاوراسپکتروم و فازی در اعداد تیلور مختلف جهت یافتن محدوده پایدار نمی‌باشد. همانطور که از نمودار گویا است از $r=6/59$ تا $r=24$ ماکزیمم نمای لیپانوف مثبت بوده و در نتیجه در این محدوده سیستم همواره رفتاری نامنظم دارد. از مقدار $r=24$ تا $r=27$ نمای لیپانوف مقداری نزدیک به صفر دارد. بنابراین در این محدوده باید به دنبال نظم در سیستم باشیم. برای رسیدن به اعداد تیلور مورد نظر از معیار دیگری به نام تابع پاوراسپکتروم استفاده شده و در کنار آن از نمودار فازی کمک گرفته شده است.

در شکل‌های (۲۲) تا (۲۴) نمودارهای پارامتر سرعت بر حسب زمان، فازی و پاوراسپکتروم برای مقدار $r=18/5$ آورده شده است. همانطور که از روی نمودار لیپانوف مشاهده می‌شود ماکزیمم نمای لیپانوف در این مقدار عددی مثبت و بزرگ می‌باشد. بنابراین انتظار می‌رود که سیستم در این محدوده رفتاری بسیار بی‌نظم از خود



شکل (۲۸): نمودار پاوراسپکتروم ($r=24/5$)

پس از گذشتن عدد تیلور کاهش یافته از مقدار ۲۷ جریان دوباره تا حد زیادی بی‌نظم می‌شود اما با رسیدن به مقدار ۳۲ بار دیگر به سمت منظم شدن پیش خواهد رفت که مراحل رسیدن به عدد تیلوری که نظم بیشتری در آن وجود دارد همانند محدوده قبلی می‌باشد.

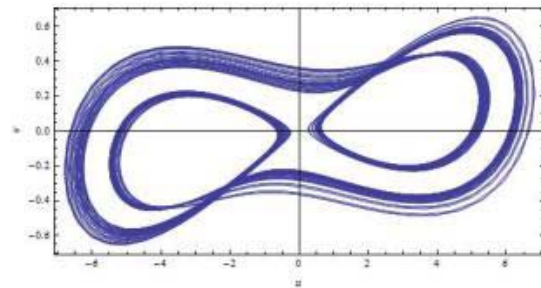


شکل (۲۹): نمایش فازی سرعت های u, v ($r=25/18$)

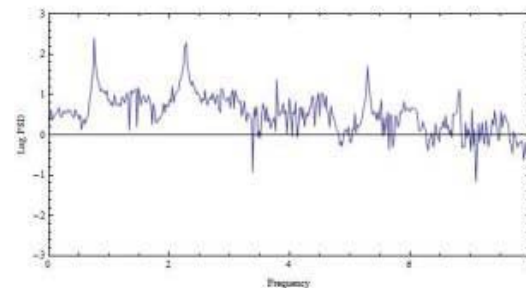
۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله پایداری جریان سیالات غیرنیوتنی با ویژگی‌های غلیظ‌شونده و رقیق‌شونده در شکاف باریک بین دو استوانه هم‌مرکز با دوران استوانه داخلی و ثابت بودن استوانه خارجی مورد مطالعه قرار گرفت. همانطور که ملاحظه شد معادلات حاکم بدست آمده دارای عبارت‌های غیرخطی از مرتبه بالا نسبت به حالت نیوتنی می‌باشند. هدف اصلی در این تحقیق اثر سیالات غیرنیوتنی در رفتار غیرخطی سیستم دینامیکی حاکم بر جریان در مقایسه با سیستم دینامیکی حاکم بر سیالات نیوتنی که در تحقیقات گذشته بدست آمده‌بود، می‌باشد. با حل معادلات بدست آمده عدد تیلور بحرانی که در آن جریان از حالت لایه‌ای خارج شده و گردابه‌های تیلور شروع به شکل‌گیری می‌کنند بدست آمده‌اند.

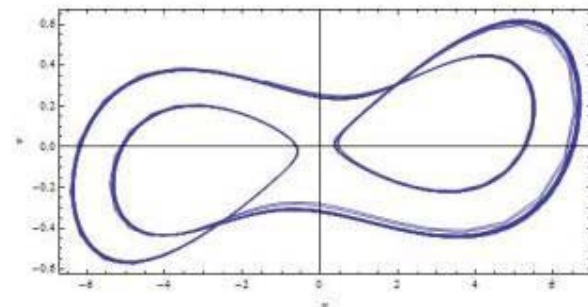
داده شده‌است. در $r=24$ همانطور که نمودار فازی و پاوراسپکتروم در شکل‌های (۲۵) و (۲۶) نشان می‌دهد رفتار سیستم دینامیکی نسبت به مقادیر r قبل از این مقدار منظم‌تر شده است و موده‌های غالب در نمودار پاوراسپکترم شکل گرفته‌است. همچنین دوران حلقه‌های نمودار فازی هم به دور مسیره‌های خاصی محدودتر شده‌است. با افزایش مقدار r سیستم دینامیکی به سمت نظم بیشتر می‌رود. در نهایت سیستم منظم‌ترین رفتار پریودیک خود را در محدوده ذکر شده ($r=24$ تا $r=27$) در $r=25/18$ از خود نشان می‌دهد. در این مقدار همانطور که در شکل‌های (۲۹) و (۳۰) مشخص است، نمودار پاوراسپکتروم و فازی رفتاری کاملاً پریودیک را نشان داده‌اند. برای درک بهتر بوجود آمدن این نظم در سیستم نمودارهای مربوطه برای $r=24/5$ نیز در شکل‌های (۲۷) و (۲۸) نشان داده شده‌اند.



شکل (۲۵): نمایش فازی سرعت های u, v ($r=24$)



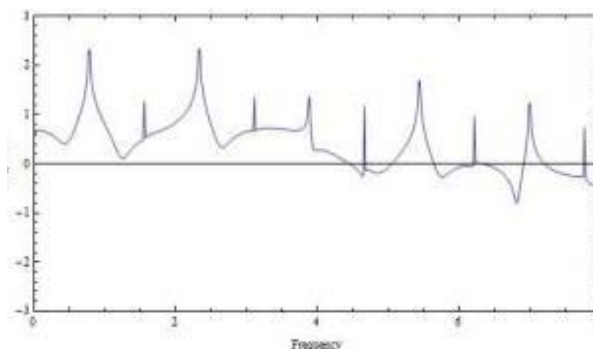
شکل (۲۶): نمودار پاوراسپکتروم ($r=24$)



شکل (۲۷): نمایش فازی سرعت های u, v ($r=24/5$)

۸- مراجع

- [1] Taylor, G., "Stability of Viscous Liquid Contained Between Two Rotating Cylinders", *Phil. Trans. R. Soc.*; A223, 1923, PP. 289
- [2] Kuhlmann, H., "Model for Taylor-Couette flow", *Phys. Rev. A* 32, No.3, 1985, pp. 1703-1707
- [3] Lorenz, E.N., "Deterministic Nonperiodic Flows", *J. Atmos. Sci.*, 20, 1963, pp. 130
- [4] Wereley, S. and Lueptow, R., "Velocity Field for Taylor-Couette Flow with an Axial Flow", *Phys. Fluids*, Vol. 11, No. 12, 1999, pp.3637
- [5] Hwang, J. and Yang, K. "Numerical Study of Taylor-Couette Flow with an Axial Flow", *Computer & Fluids*; Vol. 33, 2004, PP. 97
- [6] Altmeyer, S., Hoffmann, Ch., Heise, M., Abshagen, J., Pinter, A., Lücke, M. and Pfister, G., "End Wall Effects on the Transitions Between Taylor Vortices and Spiral Vortices", *Phys. Rev. E*, 81, 2010, 066313
- [7] Khayat, RE., "Onset of Taylor Vortices and Chaos in Viscoelastic Fluids", *Physics of Fluids*, Vol. 7, No. 9, 1995, pp. 2191-2219
- [8] Ashrafi, N., Binding, D.M. and Walters, K., "Cavitations Effects in Eccentric-Cylinder Flows of Newtonian and Non-Newtonian Fluids", *Chem. Eng. Sci.* 56, 2001, pp. 5565-5574
- [9] Li, Z. and Khayat, RE., "A Non-Linear Dynamical System Approach to Finite Amplitude Taylor-Vortex Flow of Shear-Thinning Fluids", *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 45, 2004, pp. 321-340
- [10] Chandrasekhar, S., "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability", Dover Publications, 1961, Inc. New York
- [11] Coronado-Matutti, O., Mendes, P. R. and Carvalho, M. S., "Instability of Inelastic Shear-Thinning Liquids in a Couette Flow between Concentric Cylinders", *J. Fluid Eng.* 126, 2004, pp. 385-390
- [12] Ashrafi, N. and Khayat, RE., "Shear-Thinning-Induced Chaos in Taylor-Couette Flow", *Phys. Rev. E*, Vol. 61, No. 2, 2000, pp. 1455-146
- [13] Bird, R. B., Armstrong, R. C., and Hassager, O., "Dynamics of Polymeric Liquids", second ed. (Wiley, New York, 1987), Vol. 1, 1987.
- [14] Strogatz, S. H., "Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering", Rerseus Publishing, 1994.

شکل (۳۰): نمودار پاوراسپکتروم ($f = 25/18$)

با افزایش خاصیت غلیظ‌شوندگی سیال، جریان در اعداد تیلور بالاتری از حالت کوئت خارج شده و گردابه‌های تیلور در جریان تشکیل شده‌اند و برعکس برای سیالات رقیق‌شونده با افزایش خاصیت رقیق‌شوندگی در اعداد تیلور کمتر این اتفاق رخ داده‌است. با استفاده از معیارهای تحلیل پایداری، نمودار فازی و تغییرات پارامترهای سرعت با زمان رفتار جریان پس از افزایش عدد تیلور از مقدار بحرانی آن برای سیالات رقیق‌شونده با افزایش نرخ برش مورد بررسی قرار گرفت. محدوده‌هایی از اعداد تیلور که سیستم دینامیکی غیرخطی بدست آمده رفتاری پایدار از خود نشان می‌دهد بدست آمده‌است.

با استفاده از معیار ارزشمند نمای لیاپانوف رفتار سیستم غیرخطی بدست آمده در اعداد تیلور مختلف نشان داده‌شد. صحت نتایج بدست آمده از نمودار لیاپانوف توسط دیگر معیارهای تحلیل پایداری مورد بررسی قرار گرفته و نتایج نشان داد که بین آنها تطابق قابل قبولی وجود دارد. همچنین به کمک نمودار لیاپانوف محدوده‌هایی از اعداد تیلور که سیستم رفتاری منظم پریودیک از خود نشان می‌دهد شناسایی و به کمک تحلیل‌های پاوراسپکتروم و فازی عدد تیلوری که در آن سیستم دینامیکی بصورت منظم پریودیک در می‌آید بدست آمده‌است.

نتایج حاصل، با نتایج بدست آمده از مراجع [۹] و [۱۲] تطابق خوبی دارند.